Le problème de Yamabe

Heather Macbeth*

21 novembre 2018

1 Préliminaires : La géométrie riemannienne

Soit M une variété de dimension n. Une *métrique (riemannienne)* g sur M est un choix de produit scalaire g_x sur chaque espace tangent T_xM de M, qui varie d'une manière lisse.

Plus formellement, c'est une section lisse du fibré vectoriel $\mathrm{Sym}^2(T^*M)$, les formes bilineares symmetriques sur le fibré tangent de M, qui est partout définie positive.

Une métrique g sur M détermine une géométrie sur M :

— Le *longueur* d'une coube $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, est

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}dt.$$

— La *boule de rayon* r centrée en un point $x \in M$ est

$$B_p(r) := \{\gamma(b) : \gamma : [a, b] \to M, \gamma(a) = x, L(\gamma) < r\}.$$

— l'*angle* entre deux vecteurs v, w dans l'espace tangent T_pM de M à un point p est

$$\cos^{-1}\left(\frac{g(v, w)}{\sqrt{g(v, v)g(w, w)}}\right).$$

— La métrique g détermine une mesure dVol_g, la *mesure riemannienne*, sur M, donnée dans une carte locale $\Phi : U \to M$ par

$$\int_{\Phi(U)} f \,\mathrm{dVol}_g := \int_U f(\Phi(\mathbf{x}))\sqrt{\det g(\Phi(\mathbf{x}))}\; d\mathbf{x}.$$

— En particulier la *volume* d'un borélien U de M est

$$\mathrm{Vol}(U) := \int_U \mathrm{dVol}_g\,.$$

*Notes rudimentaires, d'après [LP87, Bes87], pour un exposé dans le seminaire « Raconte-moi » de l'ENS; les remarques et les corrections sont les bienvenues. Je remercie Tristan Ozuch, qui a lu et commenté une brouillon.

2 L'action d'Einstein-Hilbert normalisée

Soit M une variété de dimension n, et soit g une métrique sur M. Soit p un point de M. Considérons la fonction des réels positifs dans les réels positifs,

$$r \mapsto \mathrm{Vol}(B_p(r)). \tag{$\star$}$$

Théorème-Definition. *Il existe un unique réel $R(g)_p$, la* courbure scalaire de g à p, *tel que l'expansion Taylor de ($\star$) à zéro est*

$$\mathrm{Vol}(B_p(r)) = c_n \left[r^n - \frac{R(g)_p}{6(n+2)} r^{n+2} + O(r^{n+3}) \right].$$

Ici et pour la suite

$$c_n := \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

est la volume de la boule euclidienne unité de dimension n.

Exemple. *Dans l'espace euclidien, à chaque point p,*

$$\mathrm{Vol}(B_p(r)) = c_n r^n,$$

et donc le coefficient de la puissance $n+2$ (et tous coefficients suivants) de l'expansion Taylor est 0. Donc la courbure scalaire est 0.

Exemple. *Dans la sphère unité de dimension 2, munie de sa métrique ronde, à chaque point p,*

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(B_p(r)) &= 2\pi[1-\cos(r)] \\ &= 2\pi[\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{24}r^4 + \tfrac{1}{6!}r^6 - \cdot]. \end{aligned}$$

La coefficient de r^4 est $-\frac{\pi}{12}$, donc la courbure scalaire est

$$\frac{-6(2+2)}{\pi} \cdot \frac{-\pi}{12} = 2.$$

Dans un façon similaire, on peut vérifier que :

Exemple. *La courbure scalaire de la sphère unité de dimension n est partout $n(n-1)$.*

Lemme. *Soit g une métrique. Pour tout $\lambda > 0$, la courbure scalaire de la métrique rééchelonnée $\lambda^2 g$ est*

$$R(\lambda^2 g)_p = \lambda^{-2} R(g)_p.$$

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned} \mathrm{dVol}_{\lambda^2 g} &= \lambda^n \,\mathrm{dVol}_g, \\ B_p^{\lambda^2 g}(r) &= B_p^g(\lambda^{-1} r), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}^{\lambda^2 g}(B_p^{\lambda^2 g}(r)) &= \lambda^n c_n \left[(\lambda^{-1} r)^n - \frac{R(g)_p}{6(n+2)} (\lambda^{-1} r)^{n+2} + O((\lambda^{-1} r)^{n+3}) \right] \\ &= c_n \left[r^n - \frac{\lambda^{-2} R(g)_p}{6(n+2)} r^{n+2} + O(r^{n+3}) \right]. \end{aligned}$$

□

Soit M une variété. Considérons la « variété » (de dimension infinie) $\mathcal{M}$, dont les points sont les métriques riemanniennes sur M, à difféomorphisme près.

Definition. *L'*action d'Einstein-Hilbert normalisée *est une fonctionnelle sur $\mathcal{M}$, donnée par*

$$Q(g) := \frac{\int_M R(g) \,\mathrm{dVol}_g}{\mathrm{Vol}(g)^{1-2/n}}.$$

Remarque. *L'*action d'Einstein-Hilbert *(sans normalisation) est la fonctionnelle*

$$\int_M R(g) \,\mathrm{dVol}_g \,.$$

Soit g une métrique. Pour tout $\lambda > 0$,

$$Q(\lambda^2 g) = \frac{\int_M [\lambda^{-2} R(g)][\lambda^n \,\mathrm{dVol}_g]}{[\lambda^n \,\mathrm{Vol}(g)]^{1-2/n}} = Q(g).$$

C'est-à-dire que la puissance $1 - \frac{2}{n}$ a été choisi pour rendre Q invariante par changement d'échelle, d'où le nom « action normalisée. »

Cette fonctionnelle a été d'abord introduit par les physiciens, elle permet de dériver la relativité générale d'un principe variationnel. Ses points critiques sont appellés *métriques d'Einstein.*

Exemple. *Si la courbure scalaire d'une métrique g est constant, $R(g) \equiv R$, alors*

$$Q(g) = R \,\mathrm{Vol}(g)^{2/n}.$$

Par exemple,

— *soit g la métrique ronde sur S^n, la sphére de dimension n : on a courbure $R(g) = n(n-1)$, volume $\mathrm{Vol}(g) = (n+1)c_{n+1}$, donc*

$$Q(g) = n(n-1)[(n+1)c_{n+1}]^{2/n}.$$

- *soit g la métrique ronde sur $\mathbb{RP}^n$, l'espace projectif réel de dimension n : alors*
$$Q(g) = 2^{-2/n} \cdot n(n-1)[(n+1)c_{n+1}]^{2/n}.$$
- *soit g une métrique plate, par exemple sur une tore, alors $Q(g) = 0$.*
- *soit g la métrique produite standarde sur une partie d'un cylindre, $[0, L] \times S^{n-1}$: on a courbure $R(g) = (n-1)(n-2)$, volume $\mathrm{Vol}(g) = nc_nL$, donc*
$$Q(g) = L^{2/n} \cdot (n-1)(n-2)[nc_n]^{2/n}.$$

Théorème (Gauss-Bonnet)**.** *Soit M une variété compacte de dimension 2. Pour toute métrique g sur M, l'action d'Einstein-Hilbert normalisée de g est*
$$Q(g) = \pi\chi(M).$$

(Ici $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler, $2 - 2g$ pour les surfaces orientées : $\chi(S^2) = 2$, $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$, $\chi(T^2) = 0$, etc.)

Par contre, en dimension $n \geq 3$, l'action d'Einstein-Hilbert n'est pas de tout trivial. Par exemple, étant donnée une variété M de dimension au moins 3, on peut construire des métriques sur M dont l'action d'Einstein-Hilbert est arbitrairement positive (∞) ou negative ($-\infty$). L'exemple du cylindre, au-dessus, peut suggérer une méthode de démonstration : dans une variété générale, on peut « étirer » la métrique le long d'une hypersurface plongée.

3 Equivalence conforme des métriques

Lemme. *Soit g, $\hat{g}$ deux produits scalaire sur un espace vectoriel V. Ils definissent les memes angles, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $v, w \in V$*
$$\frac{\hat{g}(v,w)}{\sqrt{\hat{g}(v,v)\hat{g}(w,w)}} = \frac{g(v,w)}{\sqrt{g(v,v)g(w,w)}},$$
si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\hat{g} = \lambda^2 g$.

Definition.
1. *Une métrique riemannienne $\hat{g}$ sur une variété M est une* transformation conforme *d'une autre métrique g, s'il existe une fonction strictement positive lisse $u : M \to \mathbb{R}^+_*$, telle que $\hat{g} = u^2 g$.*
2. *La propriété d'etre une transformation conforme l'une de l'autre est une relation d'equivalence sur l'ensemble de métriques sur M, qui s'appelle la relation d'*equivalence conforme*.*
3. *Une* classe conforme *est une classe d'equivalence de cette relation. La* classe conforme de *g est l'ensemble de métriques qui sont des transformations conformes de g.*

Donc une métrique est une transformation conforme de g, si et seulement s'il définit les mêmes angles que g.

Attention ! Dans la section précédente on a considéré des métriques $\hat{g}$, g telles qu'il existe un réel strictement positif λ tel que $\hat{g} = \lambda^2 g$. La **notion** d'équivalence conforme est beaucoup plus flexible, moins exigeant.

Exemple. *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe dont la dérivée ne s'annule nulle part. Alors la metriques*

$$f^*(dx^2 + dy^2)$$

est une transformation conforme de $dx^2 + dy^2$. En effet,

$$f^*(dx^2 + dy^2) = |f'|^2(dx^2 + dy^2).$$

Exemple. *Le cylindre $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ et l'espace euclidien privé d'un point $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sont homéomorphes. Ils peuvent etre identifiés de maniére à rendre la métrique euclidienne g_0 sur $\mathbb{R}^n$ une transformation conforme de la métrique produit $dt^2 + g$ sur le cylindre. (Ici g est la métrique ronde sur la sphére S^{n-1}.)*

En effet, considérons la homéomorphisme suivante :

$$\begin{array}{lrl} \Phi : & \mathbb{R} \times S^{n-1} \to & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ & (t, \mathbf{x}) \mapsto & e^t \mathbf{x}. \end{array}$$

On compare les deux métriques :

$$\begin{aligned} \Phi^* g_0 = \Phi^* \left[(dy_1)^2 + \cdots + (dy^n)^2 \right] &= e^{2t} \left[(x_1 dt + dx_1)^2 + \cdots + (x_n dt + dx_n)^2 \right] \\ &= e^{2t} \left[(\sum x_i^2) dt^2 + 2(\sum x_i dx_i) \cdot dt + \sum dx_i^2 \right] \\ &= e^{2t} \left[dt^2 + g \right]. \end{aligned}$$

Exemple. *La sphére ronde S^n, privée des deux pôles $(\mathbf{0}, \pm 1)$, est aussi homéomorphe au cylindre. Ils peuvent aussi etre identifiés de manière à rendre la métrique ronde g_+ sur S^n une transformation conforme de la métrique produit $dt^2 + g$ sur le cylindre.*

En effet, considérons la homéomorphisme suivante (la projection de Mercator*) :*

$$\begin{array}{lrll} \Phi : & \mathbb{R} \times S^{n-1} \to & S^n \setminus \{(\mathbf{0}, \pm 1)\} & \subseteq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \\ & (t, \mathbf{x}) \mapsto & (\operatorname{sech}(t)\mathbf{x}, \tanh(t)). & \end{array}$$

On peut vérifier que $\Phi^* g_+ = \operatorname{sech}^2(t)[dt^2 + g]$.

4 Le problème de Yamabe

Soit M une variété. Considérons encore la « variété » $\mathcal{M}$ de dimension infinie, dont les points sont les métriques riemanniennes sur M, à difféomorphisme près.

La relation d'equivalence conforme la munit d'une structure d'espace fibré, dont l'espace total est $\mathcal{M}$ et la base est l'ensemble de classes conformes à difféomorphisme près :

$$\mathcal{M} \to \{\text{classes conformes}\}/\text{difféomorphisme}.$$

Chaque fibre est l'ensemble de métriques sur M dans une classe conforme donnée, alors de dimension infinie.

Exemple. *Soit M une variétée orientée de dimension 2. La base de la fibré, c'est-à-dire*

$$\{\textit{classes conformes}\}/\textit{difféomorphisme},$$

est l'espace de Teichmüller de M. En particulier il est de dimension finie ($= -3\chi(M)$ si $\chi(M) < 0$).

Mais pour la suite, nous considèrerons seulement les dimensions $n \geq 3$, où la base et les fibres sont tous les deux de dimension infinie.

Pour la suite toutes variétés sont compactes.

Je vais ensuite constater quelque chose imprécise, qui n'est pas vraie ou même bien-definie, mais qui est « moralement vraie » :

« **Théorème** » ([Ber70, Koi79]). *L'action d'Einstein-Hilbert normalisée est presque convexe dans les directions le long des fibres, et elle est presque concave dans les directions transverse des fibres.*

D'ailleurs, ceci explique le fait que j'ai remarqué dans la section 2 : $\mathcal{M}$ contient des métriques dont l'action d'Einstein-Hilbert normalisée est arbitrairement positive ou negative.

Maintenant j'introduise enfin le sujet de l'exposé :

Definition. *Le* problème de Yamabe *est le probléme de trouver, dans une classe conforme donnée, une métrique qui minimise l'action d'Einstein-Hilbert normalisée.*

Grâce à ce « théorème » de Berger-Koiso, c'est plausible qu'un tel minimum existe :

— il y a au moins un infimum ;

— les fonctionnelles convexes sont bien adaptées aux problèmes variationels.

J'ai remarqué dans la section 2 que les physiciens ont introduit l'action d'Einstein-Hilbert normalisée parce qu'ils s'intéressent à ses points critiques, les *métriques d'Einstein.* Ce « théorème » de Berger-Koiso implique aussi que ces points critiques de l'action sont des points-selles. Elle motive donc le probléme de Yamabe, comme une étape dans une méthode de minimax pour trouver ces points-selles :

1. Problème de Yamabe : Dans chaque classe conforme, trouver une métrique qui minimise l'action d'Einstein-Hilbert normalisée ;
2. Trouver une classe conforme qui maximise cette minimum.

Cette deuxième étape de la programme a eu beaucoup de difficultés, donc je ne vais plus dire sur ce sujet ...

Le problème de Yamabe **pour** la sphére ronde a été résolu indépendamment par Aubin et Talenti en 1976 :

Théorème ([Aub76b, Tal76]). *Soit g_+ la métrique sur la sphère S^n de dimension n. Alors g_+ minimise elle-même l'action d'Einstein-Hilbert normalisée dans sa classe conforme.*

On introduit la constante suivante, qu'on a calculée dans la section 2 :

$$\Lambda := Q(g_+) = n(n-1)[(n+1)c_{n+1}]^{2/n}.$$

Théorème ([Aub76a]). *Soit c une classe conforme, telle qu'il existe une métrique $g \in c$, telle que*

$$Q(g) < \Lambda.$$

Alors le probléme de Yamabe peut etre résolu **pour** *c.*

Cést un théorème très subtil, parce que ce n'est pas (forcément) la métrique g qui résout le problème de Yamabe.

5 Transformations conformes qui rendent Q petit

Le probléme de Yamabe a été enfin résolu par le théorème suivant :

Théorème ([Aub76a, Sch84]). *Soit M une variété de dimension n, et soit c une classe conforme sur M, sauf (si $M = S^n$) la classe conforme de la métrique ronde. Il existe une métrique g de c, telle que*

$$Q(g) < \Lambda.$$

Je vais finir par esquisser la démonstration d'une proposition beaucoup plus simple, qui motive ce théorème.

Proposition. *Soit M une variété de dimension n, et soit c une classe conforme sur M. Étant donné un réel $\epsilon > 0$, il existe une métrique g de c, telle que*

$$Q(g) < \Lambda + \epsilon.$$

Démonstration. Choisissons une métrique g de c et un point p de M. Il existe une boule $B_0(\rho) \subseteq \mathbb{R}^n$, et des coordonnées (les *coordonnées normales*)

$$\Psi : B_0(\rho) \to M,$$

centrées en p (i.e., $\Psi(0) = p$), dans lesquelles g est « presqu'euclidienne, » i.e.,

$$g = dr^2 + r^2 g_{\log r},$$

où (g_t) sont des métriques sur $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, qui tendent vers la métrique ronde lorsque t tend vers $-\infty$.

Ceci est bien connu. Je modifie ces coordonnées par l'application du cylindre dans la boule,

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R} \times S^{n-1} \to & & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ & (t, \mathbf{x}) \mapsto & & e^t \mathbf{x}. \end{array}$$

qu'on a déjà utilisée dans la section 3. On obtient donc des coordonnées

$$\hat{\Phi} : (-\infty, \log \rho) \times S^{n-1} \to M,$$

avec l'idée que « l'image de $\{-\infty\} \times S^{n-1}$ » est p. Dans ces coordonnées la métrique g a la forme

$$g = e^{2t}[dt^2 + g_t].$$

Soient α, β des réels positifs très grands. Nous considérons la transformation conforme $\hat{g} = u(t)^2[dt^2 + g_t]$, où $u(t)$ est une mollification dans les voisinages de c_1 et c_2 de la fonction définie par morceaux

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\alpha}\operatorname{sech}(t + \alpha + 2\beta), & t < c_1; \\ e^{-\beta}2^{2/(n-2)}\cosh(\frac{n-2}{2}[t+\beta])^{2/(n-2)}, & c_1 \leq t < c_2; \\ e^t, & c_2 \leq t < \log\rho, . \end{cases}$$

Ici c_1 et c_2 a été choisi tels que

$$\begin{aligned} -\alpha - 2\beta \ll c_1 \ll -\beta \\ -\beta \ll c_2 \ll 0, \end{aligned}$$

alors pour $t \approx c_2$ on a

$$\tfrac{1}{2}e^{\alpha}\operatorname{sech}(t + \alpha + 2\beta) \approx e^{-(t+2\beta)} \approx e^{-\beta}2^{2/(n-2)}\cosh(\tfrac{n-2}{2}[t+\beta])^{2/(n-2)},$$

et pour $t \approx c_1$ on a

$$e^{-\beta}2^{2/(n-2)}\cosh(\tfrac{n-2}{2}[t+\beta])^{2/(n-2)} \approx e^{-t};$$

alors la mollification $u(t)$ ne doit pas différer beaucoup de $U(t)$. Car $u(t) \approx \exp^{2\alpha+2\beta} \cdot e^t$ quand $t \approx -\infty$, et $u(t) = e^t$ quand $t \approx \log\rho$, la fonction $u(t)$ s'étend de manière lisse à une fonction sur M.

On a alors construit une transformation conforme de g, qui approxime la géometrie de la somme connexe de (M, g) avec une sphère ronde très grande, le « trou de ver » de la somme connexe ètant très petit et de courbure scalaire nulle. L'action d'Einstein-Hilbert normalisée de cette transformation est à peu près celle d'une sphère ronde.

$\square$

Références

[Aub76a] Thierry Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 55(3) :269–296, 1976.

[Aub76b] Thierry Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *J. Differential Geometry*, 11(4) :573–598, 1976.

[Ber70] Marcel Berger. Quelques formules de variation pour une structure riemannienne. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4e série, 3(3) :285–294, 1970.

[Bes87] Arthur L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Koi79] Norihito Koiso. A decomposition of the space $\mathcal{M}$ of Riemannian metrics on a manifold. *Osaka J. Math.*, 16(2) :423–429, 1979.

[LP87] John M. Lee and Thomas H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(1) :37–91, 07 1987.

[Sch84] Richard Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 20(2) :479–495, 1984.

[Tal76] Giorgio Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 110(1) :353–372, Dec 1976.