

Département de mathématiques et applications
École Normale Supérieure

Mémoire de première année

Plongements des tores plats

Daheng Min, Ivan Yakovlev
sous la direction de Heather Macbeth

2019

Table des matières

| | | |
|-------|---|----|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Motivation géométrique | 3 |
| 2.1 | Tores plats | 4 |
| 2.2 | Impossibilité de plongement isométrique dans \mathbb{R}^3 | 6 |
| 3 | Plongement lisse dans \mathbb{R}^4 | 6 |
| 3.1 | Généralités sur la fibration de Hopf | 6 |
| 3.2 | Relèvements des courbes | 9 |
| 3.3 | Relèvements des lacets | 10 |
| 3.4 | Digression: S^1 -fibré principal et connexion | 13 |
| 3.4.1 | Exemple: Fibration de Hopf | 15 |
| 3.4.2 | Exemple: Fibré tangent unitaire d'une surface riemannienne | 16 |
| 3.5 | Cylindres et tores de Hopf | 17 |
| 3.6 | Classification des tores plats | 19 |
| 3.7 | Exemples et fin de la preuve du Théorème 3.0.1 | 22 |
| 4 | C^1 -plongement dans \mathbb{R}^3 | 24 |
| 4.1 | L'affirmation du résultat | 24 |
| 4.2 | Intégration convexe de dimension 1 | 25 |
| 4.3 | Intégration convexe de dimension 2, cas primitif | 25 |
| 4.4 | Intégration convexe de dimension 2, cas général | 26 |
| 5 | Plongements linéaires par morceaux | 27 |
| 5.1 | Pliage d'un cylindre | 27 |
| 5.2 | Rotation de structure des faces | 30 |
| 5.3 | Fin de la preuve | 31 |
| | Bibliographie | 32 |

1 Introduction

Les objets principaux de notre intérêt dans cette mémoire sont les tores plats de dimension 2. Abstraitement, ce sont des variétés riemanniennes dont la variété lisse sous-jacente est le tore de dimension 2 et qui sont localement isométriques à \mathbb{R}^2 . Plus concrètement, on peut en obtenir un comme le quotient \mathbb{R}^2/Γ , où Γ est un réseau dans \mathbb{R}^2 . De plus, à isométrie près, tout tore plat de dimension 2 (et, en fait, toute surface plate orientable) est de cette forme (voir Théorème 2.1.6). Ces objets sont donc assez compréhensibles.

En les regardant, une question se pose naturellement: peut-on réaliser un tore plat abstrait dans \mathbb{R}^3 ? C'est à dire, existe-t-il un plongement isométrique (au sens riemannien) de ce tore dans \mathbb{R}^3 ? Intuitivement, bien qu'il soit possible de fabriquer un tore à

partir d'un rectangle élastique (topologie), il est difficile de le faire avec un rectangle de papier (géométrie) — des rides vont nécessairement apparaître. Ce raisonnement intuitif est vérifié dans la section 2, où l'on prouve l'impossibilité d'un tel plongement, pour des raisons géométriques (Corollaire 2.2.2).

Mais il se trouve que 4 dimensions suffisent. Plus précisément, dans la section 3 on prouve le Théorème 3.0.1 qui dit que tout tore plat admet un plongement isométrique dans \mathbb{R}^4 , en utilisant un objet très connu dans géométrie et topologie — la fibration de Hopf. Cette construction a été décrite par Pinkall dans l'article [Pin85].

Dans la section 4, nous considérons le C^1 -plongement de tores plats dans \mathbb{R}^3 (voir Théorème 4.1.2), il est vraiment surprenant qu'une telle plongement existe. Nous allons esquisser l'idée de la construction. L'assertions plus générales ont été prouvées par Nash et Kuiper dans [Nas54] et [Kui55] respectivement. Mais nous allons suivre l'exposition excellente de Borrelli et al. [BJLT13].

Dans la section 5 on travaille avec la notion du plongement isométrique la plus faible — linéaire par morceaux. Un tel plongement correspond au pliage de la feuille de papier à la manière d'un "origami". L'existence de tels plongements est prouvée pour tous tores plats dont le développement en parallélogramme plat est "suffisamment long" (voir Théorème 5.0.2). Cette construction vient de l'article par Zalgaller [Zal97].

2 Motivation géométrique

Dans cette section, on rappelle les notions de base de géométrie riemannienne (isométrie, plongement isométrique et courbure de Gauss). Puis, dans la sous-section 2.1, on définit les tores plats et on donne un critère pour qu'une variété riemannienne soit un tore plat. Finalement, dans la sous-section 2.2, on montre qu'il n'existe pas de plongement isométrique d'un tore plat dans \mathbb{R}^3 .

Définition 2.0.1. Une C^∞ *isométrie* entre deux variétés riemanniennes (M, g_M) et (N, g_N) est une difféomorphisme $f : M \rightarrow N$ dont l'application tangente en tout point est une isométrie.

Un C^∞ *plongement isométrique* entre deux variétés riemanniennes (M, g_M) et (N, g_N) est un plongement $f : M \rightarrow N$ dont l'application tangente en tout point est une isométrie sur son image.

Exemple 2.0.2. Dans le cas où $M = U$ un ouvert de \mathbb{R}^2 et $N = \mathbb{R}^n$, on obtien la définition d'un C^∞ plongement isométrique $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

où u^i sont des coordonnées standards de \mathbb{R}^2 .

Définition 2.0.3. Supposons que nous avons une surface $S \subset \mathbb{R}^3$. Au voisinage de chaque point p de S , on peut représenter S (à isométrie près) comme le graphe d'une fonction $z = f(x, y)$ telle que $p = (0, 0)$ et $f = ex^2 + 2fxy + gy^2 + O(|(x, y)|^3)$. Alors, on définit la *courbure de Gauss* de S en p comme $4(eg - f^2)$.

Remarque. La courbure de Gauss est bien définie car invariante par isométries de \mathbb{R}^3 . De plus, le théorème Egregium nous dit que la courbure de Gauss ne dépend pas du plongement isométrique de S dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. La notion de la courbure de Gauss peut être étendue à une surface riemannienne abstraite.

2.1 Tores plats

Rappelons qu'un **réseau** dans \mathbb{R}^2 est un sous-groupe abélien libre de \mathbb{R}^2 , de rang 2, engendré par deux vecteurs linéairement indépendants. Par exemple, si $\Gamma = \{mv_1 + nv_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$, avec v_1, v_2 linéairement indépendants, on note Γ par $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Définition 2.1.1. *Un **tore plat** est une variété riemannienne isométrique à \mathbb{R}^2/Γ , où Γ est un réseau de \mathbb{R}^2 , avec la métrique induite de la métrique standard sur \mathbb{R}^2 .*

Notons que, bien que les tores plats soient tous orientables, lorsque nous utilisons le terme tore plat, nous les considérons uniquement comme des variétés riemanniennes, mais non comme variétés riemanniennes orientées.

Lemme 2.1.2. *La courbure de Gauss d'un tore plat est 0.*

Démonstration. Le lemme découle du théorème Egregium parce que la courbure d'un plan dans \mathbb{R}^3 est évidemment 0. □

Exemple 2.1.3. *Un C^∞ plongement isométrique de \mathbb{R}^2/Γ dans \mathbb{R}^n peut être considéré comme un plongement isométrique Γ -invariante $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, c'est à dire, pour tout $v \in \Gamma$ on a $f(x + v) = f(x)$.*

Maintenant, on va donner un critère pour qu'une variété riemannienne soit un tore plat.

Lemme 2.1.4. *Le groupe d'isométrie de $(\mathbb{R}^2, \text{can})$ est $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, \text{can}) = \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$, où can désigne la métrique standard sur \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ désigne le groupe engendré par les translations et les transformations linéaires orthogonales. De plus, les isométries qui fixent l'origine sont les applications linéaires orthogonales.*

Démonstration. Premièrement, il est clair que les translations et les transformations linéaires orthogonales sont des isométries. Inversement, si f est une isométrie, alors $F = f - f(0)$ est également une isométrie et a 0 comme point fixe. Il en résulte que la carte tangente $T_0F : T_0\mathbb{R}^2 \rightarrow T_0\mathbb{R}^2$ est une isométrie. Ensuite, si nous identifions \mathbb{R}^2 avec $T_0\mathbb{R}^2$, alors F et T_0F sont deux isométries de \mathbb{R}^2 , les deux fixent 0, et induisent la même application tangente à 0. Par [Pet16, Proposition 5.6.2], $F = T_0F$ est une transformation orthogonale linéaire, donc f est une composition de la translation et de la transformation linéaire orthogonale. La deuxième assertion découle de la preuve précédente. □

Soit $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$ une isométrie renversant l'orientation. Alors à partir de la preuve du lemme, nous voyons que pour tout $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2, \text{can})$, $f = t \circ s$ ou $f = t \circ s \circ r$, où t est une translation et s est une rotation.

Lemme 2.1.5. *Soit $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2, \text{can}) = \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ une isométrie préservant l'orientation sans point fixe, alors f est une translation.*

Démonstration. Puisque la translation et la rotation préservent l'orientation, il en résulte par le Lemme que $f = t \circ s$, où t est une translation par le vecteur v et s est une rotation d'angle θ . En résolvant $z = e^{i\theta}z + v$, nous voyons que si $e^{i\theta} \neq 1$, alors f a un point fixe. Donc f doit être une translation. \square

Théorème 2.1.6. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et orientable à 2 dimensions de courbure constante zéro, alors M est un tore plat.*

Le point clé dans la preuve du Théorème 2.1.6 est le théorème de Killing-Hopf (voir [Pet16, Corollaire 5.6.14]).

Théorème 2.1.7. *Si (M, g) est une variété riemannienne connexe, géodésiquement complète, à courbure constante k , alors le revêtement universel de M est isométrique à S_k^n . Où S_k^n indique la forme spatiale (space form en anglais) de dimension n et de courbure sectionnelle constante k .*

Notons que lorsque $n = 2, k = 0$, alors $S_k^n = (\mathbb{R}^2, \text{can})$.

Démonstration du Théorème 2.1.6. Tout d'abord, d'après la formule de Gauss-Bonnet, nous trouvons que la caractéristique d'Euler $\chi(M) = 0$, donc M est difféomorphe à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, donc il y a un revêtement différentiable $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ dont le groupe de transformation de revêtement est isomorphe à \mathbb{Z}^2 , avec les générateurs $(1, 0), (0, 1)$ de \mathbb{Z}^2 correspondant à des applications préservant l'orientation. Puisque M est compact, (M, g) est géodésiquement complet ([Pet16, Corollaire 5.2.5]). Or (\mathbb{R}^2, π^*g) est aussi une variété riemannienne géodésiquement complet, et de plus, elle est simplement connexe. ([Pet16, Corollaire 5.6.3])

Maintenant, nous appliquons le théorème de Killing-Hopf à (\mathbb{R}^2, π^*g) , ce qui montre que le revêtement universel de (\mathbb{R}^2, π^*g) est isométrique à $(\mathbb{R}^2, \text{can})$, mais (\mathbb{R}^2, π^*g) est simplement connexe, donc isométrique à $(\mathbb{R}^2, \text{can})$. En composant cette isométrie avec π , nous obtenons un revêtement riemannien $(\mathbb{R}^2, \text{can}) \rightarrow (M, g)$, dont le groupe de transformation de revêtement est isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Puisque le revêtement est un revêtement riemannien, les transformations de revêtement sont toutes des isométries. $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, \text{can}) = \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ et les transformations de revêtement doivent être sans points fixes. Soit t_1, t_2 deux générateurs du groupe de transformation de revêtement correspondant à $(1, 0), (0, 1)$ de \mathbb{Z}^2 . Puisqu'ils sont des isométries, sans point fixés et préservant l'orientation, il en résulte par le Lemme 2.1.5 qu'ils doivent être des translation par certains vecteurs. Puisque M est compact, leurs vecteurs correspondants sont linéairement indépendants. Le résultat suit. \square

Remarque. En fait, nous n'avons pas besoin de ce résultat dans ce qui suit. Cependant, cela renforce le théorème principal 3.1.

2.2 Impossibilité de plongement isométrique dans \mathbb{R}^3

Proposition 2.2.1. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte connexe orientée, alors il existe $x \in S$ tel que la courbure de Gauss $K(x)$ en x soit strictement positive.*

Démonstration. Comme S est compacte, on peut trouver un point $p \in S$ à distance maximale de l'origine. Quitte à effectuer une rotation et une homothétie, on peut supposer que $p = (0, 0, 1)$. On se donne $U \subset \mathbb{R}^2$ voisinage ouvert de 0 et $z : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞ tels que l'application $U \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, z(x, y))$ est une paramétrisation de S au voisinage de p . On a $z(0, 0) = 1$, $dz(0, 0) = 0$. On peut donc écrire $z(x, y) = 1 + ex^2 + 2fxy + gy^2 + O(|x, y|^3)$. Quitte à choisir d'autres coordonnées orthonormales directes sur $\mathbb{R}^2 \times 0$ (ce qui n'affecte pas la courbure en p), on peut supposer que $z(x, y) = 1 + ex^2 + gy^2 + O(|x, y|^3)$. On a alors en p que $K(p) = 4eg$. Par maximalité de la norme en p , on peut écrire $z(x, y) \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + O(|x, y|^3)$. Cela force $e, f \leq -\frac{1}{2}$ puis $K(p) \geq 1$. \square

Corollaire 2.2.2. *Il n'y a pas de plongement isométrique de tore plat dans \mathbb{R}^3 .*

3 Plongement lisse dans \mathbb{R}^4

L'objectif de cette partie est de prouver le résultat suivant:

Théorème 3.0.1. *Tout tore plat de dimension 2 peut être plongé isométriquement dans \mathbb{R}^4 .*

La preuve repose sur une construction explicite décrite par Pinkall dans [Pin85] dont l'ingrédient clé est la *fibration de Hopf*. Mais notre exposition va être plus détaillée.

Dans la subsection 3.1 on introduit la fibration de Hopf et ses propriétés. Dans la subsection 3.2 on montre comment relever les courbes de S^2 dans S^3 par rapport à la fibration de Hopf. Dans les subsection 3.3 et 3.5 nous donnons les preuves plus explicites que ceux de Pinkall des Propositions 3.3.3 et 3.5.2, qui sont les propositions clés dans la preuve du Théorème 3.0.1. La subsection 3.4 donne le point de vue plus général sur la construction, en introduisant la notion de S^1 -fibré principal. Dans la subsection 3.6 on classifie des tores plats à homothétie près, en utilisant l'action de $PGL(2, \mathbb{Z})$ sur le demi-plan supérieur. Finalement, dans la subsection 3.7 on finit la preuve du Théorème 3.0.1, en faisant l'analyse précise de nombre de types de courbes dans S^2 correspondantes à chaque tore plat. Cette analyse nous a permis de corriger une erreur dans la preuve de Pinkall.

3.1 Généralités sur la fibration de Hopf

Rappelons que sur S^2 on a les cartes $U_N = S^2 \setminus \{N\} = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, $U_S = S^2 \setminus \{S\} = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ qui sont difféomorphes à \mathbb{C} par les projections stéréographiques sur le

plan $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$:

$$p_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \frac{(x, y)}{1 - z}$$

$$p_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \frac{(x, y)}{1 + z}$$

d'inverses

$$p_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_N, (u, v) \mapsto \frac{(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)}{u^2 + v^2 + 1}$$

$$p_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_S, (u, v) \mapsto \frac{(2u, 2v, 1 - u^2 - v^2)}{u^2 + v^2 + 1}$$

Définissons deux applications

$$\pi_N : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, (z, w) \mapsto \frac{z}{w}$$

$$\pi_S : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z, w) \mapsto \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$$

Proposition 3.1.1. *Les applications $p_N^{-1} \circ \pi_N$ et $p_S^{-1} \circ \pi_S$ coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. Elles définissent une application lisse $\hat{\pi} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^2$.*

Démonstration. Rappelons que le changement de carte $p_S \circ p_N^{-1}$ sur S^2 est donné par l'inversion dans le cercle unité $(x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}$. Dans les coordonnées complexes cette inversion s'écrit $z \mapsto \bar{z}^{-1}$.

L'intersection des domaines de définition est $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z \neq 0, w \neq 0\}$. Pour ces points on a donc:

$$\begin{aligned} p_N^{-1} \circ \pi_N(z, w) &= p_N^{-1} \left(\frac{z}{w} \right) = p_S^{-1} \left(p_S \circ p_N^{-1} \left(\frac{z}{w} \right) \right) \\ &= p_S^{-1} \left(\frac{\bar{w}}{\bar{z}} \right) = p_S^{-1} \circ \pi_S(z, w). \end{aligned}$$

Comme $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, ces deux applications bien définissent une application $\hat{\pi} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^2$. Elle est lisse, car ses expressions dans les cartes (U_N, p_N) et (U_S, p_S) sont évidemment lisses. \square

Dans la suite on fait les identifications $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Définition 3.1.2. *La **fibration de Hopf** π est la restriction de $\hat{\pi}$ à $S^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. C'est donc une application lisse $S^3 \rightarrow S^2$.*

Proposition 3.1.3. *L'expression pour $\pi : S^3 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est*

$$\pi(z, w) = (2\bar{w}z, |z|^2 - |w|^2).$$

Démonstration. Notons que si on identifie (u, v) avec $Z = u + iv$, alors l'expression complexe pour p_N^{-1} est $p_N^{-1}(Z) = \frac{(2u, 2v, u^2+v^2-1)}{u^2+v^2+1} = \frac{(2Z, |Z|^2-1)}{|Z|^2+1}$.

Alors, pour $w \neq 0$ on a:

$$\begin{aligned} \pi(z, w) &= p_N^{-1} \circ \pi_N(z, w) = p_N^{-1}\left(\frac{z}{w}\right) \\ &= \frac{(2z/w, |z|^2/|w|^2 - 1)}{|z|^2/|w|^2 + 1} = \frac{(2\bar{w}z, |z|^2 - |w|^2)}{|z|^2 + |w|^2}. \end{aligned}$$

Il reste à noter que S^3 s'identifie avec l'ensemble $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. \square

Point de vue projective. L'application de Hopf $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ peut être aussi construite comme suit. D'abord, on restreint la projection canonique $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ à la sphère unité S^3 dans \mathbb{C}^2 (où on fait l'identification $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$). Puis on compose avec le difféomorphisme canonique $s : \mathbb{C}P^1 \cong S^2$:

$$\pi = s \circ p|_{S^3}$$

C'est en effet la fibration de Hopf. Cela peut être vérifié aisément en coordonnées locales.

Point de vue quaternionique. Pour notre problème nous avons aussi besoin d'un point de vue quaternionique. Soit \mathbb{H} l'algèbre à division des quaternions $\{q = a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ avec les relations quaternioniques: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$. On identifie \mathbb{H} avec \mathbb{C}^2 par $a + bi + cj + dk = (a + bi, c + di) = (z, w) = z + wj$. La multiplication quaternionique se réécrit donc comme $(z, w)(z', w') = (zz' - w\bar{w}', zw' + w\bar{z}')$. Comme dans \mathbb{C} , on peut munir \mathbb{H} d'une norme par $|q|^2 = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |z|^2 + |w|^2$.

On identifie S^3 avec l'ensemble de quaternions unitaires $\{q \in \mathbb{H}, |q| = 1\}$ et S^2 avec la sphère unité dans le sous-espace de \mathbb{H} engendré par $1, j$ et k . Donc $S^2 = \{(t, \xi) | t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{C}, t^2 + |\xi|^2 = 1\}$. Rappelons que pour tous $p, q \in \mathbb{H}$ on a $|pq| = |p| \cdot |q|$. Donc le groupe S^3 agit isométriquement sur lui-même par multiplication à gauche.

Soit $q \mapsto \tilde{q}$ l'antiautomorphisme de \mathbb{H} qui fixe $1, j, k$ et envoie i vers $-i$. Dans les coordonnées complexes il devient $(z, w) \mapsto (\bar{z}, w)$. Le fait que c'est un antiautomorphisme signifie que pour tous $p, q \in \mathbb{H}$ on a: $\widetilde{p+q} = \tilde{p} + \tilde{q}$ et $\tilde{p}q = \tilde{q}\tilde{p}$.

Proposition 3.1.4. *L'expression complexe pour l'application $S^3 \rightarrow \mathbb{H}$, $q \mapsto \tilde{q}q$ est*

$$(|z|^2 - |w|^2, 2\bar{z}w).$$

En particulier, son image est dans $\text{span}(1, j, k)$, et, quitte à composer avec l'isométrie $\text{span}(1, j, k) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(a, c, d) \mapsto (c, -d, a)$, c'est la fibration de Hopf.

Démonstration. En regardant les expressions complexes pour la multiplication et pour l'antiautomorphisme, on obtient:

$$\tilde{q}q = (\bar{z}, w)(z, w) = (\bar{z}z - w\bar{w}, \bar{z}w + w\bar{z}) = (|z|^2 - |w|^2, 2\bar{z}w).$$

Le resultat découle de la Proposition 3.1.3. \square

Les fibres de π . Notons que d'après l'expression de π dans des cartes de S^2 , la fibre de π contenant $(z, w) = q$ est exactement le cercle $(e^{i\phi}z, e^{i\phi}w) = e^{i\phi}q, \phi \in \mathbb{R}$.

On peut le voir aussi du point de vue projective: comme tout sous-espace de dimension complexe 1 est un sous-espace de dimension réelle 2, il intersecte S^3 en un cercle de rayon 1. Alors pour tout $x \in S^2$ sa préimage $\pi^{-1}(x)$ est S^1 .

Donc π donne une partition de S^3 par des grands cercles. De plus, la fibration de Hopf provient de l'action de S^1 sur S^3 par $e^{i\phi} \cdot (z, w) \mapsto (e^{i\phi}z, e^{i\phi}w)$.

En fait, on a

Lemme 3.1.5. *La fibration de Hopf π est une fibration localement triviale.*

Démonstration. L'application π est bien une submersion surjective (on peut le déduire du fait que la projection canonique $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ est une submersion surjective). De plus, S^3 est compact, donc π est une application propre. Alors, par le théorème d'Ehresmann, π est une fibration localement triviale. \square

3.2 Relèvements des courbes

L'idée principale de la preuve est que l'image inverse de toute courbe fermée simple dans S^2 est un tore plat plongé dans S^3 .

Lemme 3.2.1. *Soit $p : [a, b] \rightarrow S^2$ une courbe immergée. Alors on peut trouver une courbe $\eta : [a, b] \rightarrow S^3$ telle que $\pi \circ \eta = p$ et η est orthogonale aux fibres de π .*

Démonstration. Comme $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ est une fibration localement triviale (Lemme 3.1.5), on peut relever p en une courbe lisse $\eta_0 : [a, b] \rightarrow S^3$ de sorte que $\pi \circ \eta_0 = p$ (propriété HLP, voir [Hat02, Théorème 4.48]). Maintenant, on va chercher η sous la forme $\eta(t) = e^{i\phi(t)}\eta_0(t)$. Evidemment, on a bien $\pi \circ \eta = p$. Le vecteur tangent à la fibre de π contenant $\eta(t)$ est égal à $ie^{i\phi(t)}\eta_0(t)$. La condition d'orthogonalité se réécrit donc comme $\langle \eta'(t), ie^{i\phi(t)}\eta_0(t) \rangle = 0$. En développant on obtient:

$$\langle i\phi'(t)e^{i\phi(t)}\eta_0(t) + e^{i\phi(t)}\eta_0'(t), ie^{i\phi(t)}\eta_0(t) \rangle = 0.$$

Comme la multiplication par $e^{i\phi(t)}$ est une isométrie, l'équation se simplifie:

$$\begin{aligned} \langle i\phi'(t)\eta_0(t) + \eta_0'(t), i\eta_0(t) \rangle &= 0, \\ \phi'(t)|i\eta_0(t)|^2 + \langle \eta_0'(t), i\eta_0(t) \rangle &= 0, \\ \phi'(t) &= -\langle \eta_0'(t), i\eta_0(t) \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\phi = -\int \langle \eta_0', i\eta_0 \rangle$ convient. \square

Lemme 3.2.2. *Soit p une courbe immergée dans S^2 de longueur L , et soit η définie comme dans le Lemme 3.2.1. Alors pour tout t on a $|p'(t)| = 2|\eta'(t)|$. En particulier, la longueur de η est égale à $L/2$.*

Démonstration. On sait que $\eta'(t)$ est orthogonale à $i\eta(t)$. Donc il existe une application $u : [0, L] \rightarrow \text{span}(1, j, k)$ telle que

$$\eta' = u\eta.$$

Alors pour p dans S^2 , par Proposition 3.1.4, on a $p = \tilde{\eta}\eta$, $p' = \tilde{\eta}'\eta + \tilde{\eta}\eta' = (\widetilde{u\eta})\eta + \tilde{\eta}u\eta = 2\tilde{\eta}u\eta = 2\tilde{\eta}\eta'$. Donc $|p'| = 2|\tilde{\eta}| \cdot |\eta'| = 2|\eta'|$ et la longueur de p est 2 fois plus grande que celle de η . \square

3.3 Relèvements des lacets

Lemme 3.3.1. *Soit X le champ de vecteurs qui engendre la S^1 -action de la fibration de Hopf sur S^3 . Soit $\omega = \langle X, \cdot \rangle$ la 1-forme duale. Soit aussi dV la 2-forme d'aire canonique sur S^2 . Alors $d\omega$ est l'image réciproque de $\frac{1}{2}dV$ par π :*

$$d\omega = \pi^* \frac{1}{2} dV.$$

Démonstration. On va vérifier l'identité en coordonnées. Notons que le champ de vecteurs X et la 1-forme ω peuvent être prolongés à tous le \mathbb{R}^4 . Soit $x = (z, w) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et posons $\hat{X}(x) = \partial_\phi(e^{i\phi}z, e^{i\phi}w)|_{\phi=0} = (iz, iw) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$. Donc on obtient:

$$\hat{\omega} = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 - x_4 dx_3 + x_3 dx_4,$$

$$d\hat{\omega} = 2(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4).$$

$$d\omega = d\hat{\omega}|_{S^3}$$

Rappelons que $\pi = \hat{\pi}|_{S^3}$ (Définition 3.1.2) et que sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ on a $\hat{\pi} = p_N^{-1} \circ \pi_N$ (Proposition 3.1.1).

L'expression pour π_N est $(z, w) \mapsto \frac{z}{w}$ ou

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{x_3 + ix_4} = \left(\frac{x_1 x_3 + x_2 x_4}{x_3^2 + x_4^2}, \frac{x_2 x_3 - x_1 x_4}{x_3^2 + x_4^2} \right).$$

Soit $s = (p_N^{-1})^* dV$ l'image réciproque de dV par p_N^{-1} . Alors il suffit de prouver que $d\hat{\omega}$ coïncide avec $\frac{1}{2}\pi_N^* s$ sur S^3 (aux points où cette dernière est définie).

Remarque. En fait, cela donne la preuve de l'identité pour $\mathbb{R}^4 \setminus \{x_3 = x_4 = 0\}$. En répétant le raisonnement qui suit avec la projection de pôle sud p_S on obtient la preuve pour $\mathbb{R}^4 \setminus \{x_1 = x_2 = 0\}$. Comme ces deux ensembles recouvrent $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, le fait initial va être prouvé.

L'expression pour s peut être trouvée comme suit. D'abord, l'expression g de la métrique de la sphère après la projection p_N est bien connue [Lee18, calcul dans la Proposition 3.5]: $g = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (du^2 + dv^2)$, où (u, v) sont des coordonnées standards dans le plan de la projection stéréographique. Puis on utilise la formule pour l'expression de la forme de volume en coordonnées [Lee13, Proposition 15.31]:

$$s = \sqrt{\det(g_{ij})} du \wedge dv = \sqrt{\left(\frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right)^2} du \wedge dv = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} du \wedge dv.$$

Ecrivons $\pi_N = (u, v)$, où $u, v : \mathbb{R}^4 \setminus \{x_3 = x_4 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$d\pi_N = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_3}{x_3^2+x_4^2} & \frac{x_4}{x_3^2+x_4^2} & \frac{-x_1x_3^2+x_1x_4^2-2x_2x_3x_4}{(x_3^2+x_4^2)^2} & \frac{-x_2x_4^2+x_2x_3^2-2x_1x_3x_4}{(x_3^2+x_4^2)^2} \\ -\frac{x_4}{x_3^2+x_4^2} & \frac{x_3}{x_3^2+x_4^2} & -\frac{-x_2x_4^2+x_2x_3^2-2x_1x_3x_4}{(x_3^2+x_4^2)^2} & \frac{-x_1x_3^2+x_1x_4^2-2x_2x_3x_4}{(x_3^2+x_4^2)^2} \end{pmatrix}$$

Remarquons que $d\pi_N$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \end{pmatrix}$.

Maintenant, on va calculer π_N^*s en utilisant les formules suivantes, qui sont vraies pour les points de S^3 est les espaces tangents de S^3 :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \quad (1)$$

$$x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 + x_4dx_4 = 0 \quad (2)$$

Ecrivons:

$$\begin{aligned} \pi_N^*s &= \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} du \wedge dv = \frac{4}{\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2+x_4^2} + 1\right)^2} du \wedge dv \\ &= \frac{4(x_3^2 + x_4^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2} du \wedge dv \stackrel{(1)}{=} 4(x_3^2 + x_4^2)^2 du \wedge dv \end{aligned}$$

Puis:

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= (A^2 + B^2)dx_1 \wedge dx_2 + (C^2 + D^2)dx_3 \wedge dx_4 + \\ &\quad + (-AD + BC)(dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4) + (AC + BD)(dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3) \\ &= \frac{1}{x_3^2 + x_4^2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_3^2 + x_4^2)^2} dx_3 \wedge dx_4 + \frac{1}{(x_3^2 + x_4^2)^2} \cdot E \end{aligned}$$

où on a dénoté

$$\begin{aligned} E &= (x_1x_4 - x_2x_3)(dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4) - (x_1x_3 + x_2x_4)(dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3) \\ &= (x_1dx_1 + x_2dx_2) \wedge (x_4dx_3 - x_3dx_4) + (-x_2dx_1 + x_1dx_2) \wedge (x_3dx_3 + x_4dx_4) \\ &\stackrel{(2)}{=} (-x_3dx_3 - x_4dx_4) \wedge (x_4dx_3 - x_3dx_4) + (-x_2dx_1 + x_1dx_2) \wedge (-x_1dx_1 - x_2dx_2) \\ &= (x_3^2 + x_4^2)dx_3 \wedge dx_4 + (x_1^2 + x_2^2)dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient:

$$\begin{aligned} \pi_N^*s &= 4 \left[(x_3^2 + x_4^2)dx_1 \wedge dx_2 + (x_1^2 + x_2^2)dx_3 \wedge dx_4 + (x_3^2 + x_4^2)dx_3 \wedge dx_4 + (x_1^2 + x_2^2)dx_1 \wedge dx_2 \right] \\ &\stackrel{(1)}{=} 4(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) = 2 \cdot d\widehat{\omega}. \end{aligned}$$

□

Remarque. Soit $p : S^1 \rightarrow S^2$ une C^∞ courbe orientée simple fermée. Alors elle sèpare S^2 en deux composantes connexes. Chaque composante est homéomorphe au disque ouvert D^2 . On peut le voir en utilisant le théorème de Jordan-Schoenflies (voir, par exemple, [Cai51]) après la projection stéréographique sur un plan. En appliquant à chaque composante connexe le théorème de la représentation conforme de Riemann, ainsi que le comportement lisse au bord de l'application de Riemann (voir [BK87]), on obtien que la fermeture de chaque composante, avec le bord p , est en fait difféomorphe au disque fermé $\overline{D^2}$ comme la variété au bord. Une de ces composantes est située à gauche de p , et l'autre — à droite.

Définition 3.3.2. Avec la notation comme ci-dessus, *l'aire orientée* de p est définie comme l'aire de la composante connexe à gauche de p .

Proposition 3.3.3. Posons $S^1 := \mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z}$ pour $\alpha > 0$. Soit $p : S^1 \rightarrow S^2$ une courbe fermée simple de l'aire orientée A . Relevons p en une courbe $\eta : \mathbb{R} \rightarrow S^3$ comme dans le Lemme 3.2.1, c'est à dire: $\forall t : \pi(\eta(t)) = p(t + \alpha\mathbb{Z})$ et $\eta' \perp i\eta$.

Alors pour tout t on a $\eta(t + \alpha) = e^{-iA/2}\eta(t)$.

Démonstration. Par la construction de η , on a $\pi(\eta(\alpha)) = \pi(\eta(0))$. On peut donc supposer

$$\eta(\alpha) = e^{i\delta}\eta(0)$$

pour un certain $\delta \in \mathbb{R}$.

Maintenant, soit $\eta(t + \alpha) = e^{i\delta_1(t)}\eta(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \eta'(t + \alpha) &= i\delta_1'(t)e^{i\delta_1(t)}\eta(t) + e^{i\delta_1(t)}\eta'(t) \\ &= i\delta_1'(t)\eta(t + \alpha) + e^{i\delta_1(t)}\eta'(t). \end{aligned}$$

Notons que $\eta'(t) \perp i\eta(t) = ie^{-i\delta_1(t)}\eta(t + \alpha)$, donc $e^{i\delta_1(t)}\eta'(t) \perp i\eta(t + \alpha)$. Comme $\eta'(t + \alpha) \perp i\eta(t + \alpha)$, on obtien $i\delta_1'(t)\eta(t + \alpha) \perp i\eta(t + \alpha)$. Alors $\delta_1'(t) \equiv 0 \Rightarrow \delta_1 = \text{const} = \delta$ et donc

$$\forall t \in \mathbb{R} : \eta(t + \alpha) = e^{i\delta}\eta(t).$$

Choisissons un plongement $c : D^2 \rightarrow S^2$ tel que $\partial c = p$ (il existe par la remarque précédente). On peut penser à D^2 comme un quotient de $S^1 \times I$, où $I := [0, 1]$, en réduisant $S^1 \times \{1\}$ à un point. Donc l'application c induit $g : S^1 \times I \rightarrow S^2$, et on peut la considérer comme une homotopie $\{g_s : S^1 \rightarrow S^2\}_{s \in I}$, avec $g_0 = p$ et $g_1 \equiv \text{const}$.

Considérons maintenant $\xi : \mathbb{R} \rightarrow S^3$, $\xi(t) = e^{-i\frac{\delta}{\alpha}t}\eta(t)$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\xi(t + \alpha) = e^{-i\frac{\delta}{\alpha}(t+\alpha)}\eta(t + \alpha) = e^{-i\frac{\delta}{\alpha}t}e^{-i\delta}e^{i\delta}\eta(t) = e^{-i\frac{\delta}{\alpha}t}\eta(t) = \xi(t)$. Donc ξ descend en une application $S^1 = \mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z} \rightarrow S^3$. De plus, $\pi \circ \xi = p = g_0$. Comme la fibration de Hopf est une fibration localement triviale (Lemme 3.1.5), elle a la propriété HLP (voir [Hat02, Théorème 4.48]), et il existe donc un relèvement $h : S^1 \times I \rightarrow S^3$ de $g : S^1 \times I \rightarrow S^2$ (c'est à dire $\pi \circ h = g$), telle que $h_0 = \xi$. Puisque, par construction, l'image de $S^1 \times \{1\}$ par g est l'image d'un point de c , on voit que l'image de $S^1 \times \{1\}$ par h est dans la fibre d'un point de S^2 dans S^3 . On peut donc écrire $h(t, 1) = e^{i\phi(t)}h(0, 1)$, pour une certaine $\phi : \mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Maintenant, on calcule toutes les intégrales sur la variété $S^1 \times I$.

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \int_{S^1 \times I} g^* \frac{1}{2} dV = \int_{S^1 \times I} h^* \pi^* \frac{1}{2} dV \\ &= \int_{S^1 \times I} h^* d\omega = \int_{S^1 \times I} dh^* \omega = \int_{\partial(S^1 \times I)} h^* \omega. \end{aligned}$$

Notons que $\partial(S^1 \times I) = (S^1 \times \{0\}) \cup (S^1 \times \{1\})$. Sur $S^1 \times \{0\}$ on a

$$\int_{S^1} h_0^* \omega = \int_0^\alpha \omega(\xi'(t)) dt = \int_0^\alpha \langle \xi'(t), i\xi(t) \rangle dt$$

On a aussi

$$\xi'(t) = \left(i \left(-\frac{\delta}{\alpha} \right) + \frac{\eta'(t)}{\eta(t)} \right) \xi(t).$$

Rappelons que $\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = u(t) \in \text{span}(1, j, k)$. Alors

$$\langle \xi'(t), i\xi(t) \rangle = -\frac{\delta}{\alpha}.$$

Sur $S^1 \times \{1\}$ on a

$$\begin{aligned} \int_{S^1} h_1^* \omega &= \int_0^\alpha \omega(h_1'(t)) dt = \int_0^\alpha \langle h_1'(t), ih_1(t) \rangle dt \\ &= \int_0^\alpha \langle i\phi'(t)h_1(t), ih_1(t) \rangle dt = \int_0^\alpha \phi'(t) dt = 2k\pi, \end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{Z}$. La dernière égalité est due au fait que $\phi : \mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (en fait c'est le degré de l'application ϕ).

On a donc

$$\delta = -\frac{A}{2} - 2k\pi.$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\eta(t + \alpha) = e^{i[-A/2 - 2k\pi]}\eta(t) = e^{-iA/2}\eta(t)$. □

3.4 Digression: S^1 -fibré principal et connexion

Dans cette section, nous introduisons la notion de S^1 -fibré principal. Pour plus de détails sur ce sujet, on peut consulter [KN96, Chapitre 2]. Nous donnerons ensuite deux exemples détaillés, l'un étant la fibration de Hopf, l'autre étant le fibré tangent unitaire d'une surface riemannienne.

Définition 3.4.1. Soit M une variété lisse, S^1 le groupe de Lie. Un S^1 -**fibré principal** sur M , est une variété P munie d'une submersion surjective $\pi : P \rightarrow M$ et une action à gauche $S^1 \rightarrow \text{Diff}(P)$ qui:

- preserve les fibres de π ;

- agit librement;
- agit transitivement sur chaque fibre.

Définition 3.4.2. Soit $\pi : P \rightarrow M$ un S^1 -fibré principal. Alors, une **section (globale)** de π est une application lisse $s : M \rightarrow P$ telle que $\pi \circ s = id_M$. Soit $U \subseteq M$ un sous-ensemble ouvert de M , alors une **section (locale)** de π sur U est une application lisse $s : U \rightarrow P$ telle que $\pi \circ s = id_U$.

Soit $\pi : P \rightarrow M$ un S^1 -fibré principal sur M . Dans l'espace tangent de chaque point q de P , il existe un sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $X_q = \frac{d}{dt}|_{t=0} e^{it}.q$, noté F_q . Alors, la collection $\{F_q\}_{q \in P}$ forme un sous-fibré du fibré tangent TP .

Définition 3.4.3. Une **connexion principale** sur P est un sous-fibré H de TP tel que

- $TP = F \oplus H$;
- H est invariant par S^1 , c'est-à-dire $d(L_g)_x(H_x) = H_{gx}, \forall g \in S^1, \forall x \in P$.

Définition 3.4.4. Soit $\pi : P \rightarrow M$ un S^1 -fibré principal, H une connexion de P . Soit $p : [a, b] \rightarrow M$ une courbe lisse dans M . Un **relèvement horizontal** de p est une courbe lisse $\eta : [a, b] \rightarrow P$ telle que

- $\pi(\eta(t)) = p(t)$;
- $\eta'(t) \in H_{\eta(t)}, \forall t \in [a, b]$.

Remarque. En fait, dans tout S^1 -fibré principal avec une connexion, toute courbe lisse dans l'espace de base admet un relèvement horizontal par rapport à cette connexion, voir [Son15, Theorem 10.4].

Soit $\pi : P \rightarrow M$ un S^1 -fibré principal. Pour tout $q \in P$ considérons l'application $r_q : S^1 \rightarrow \pi^{-1}(\pi(q)) \subset P, e^{i\phi} \mapsto e^{i\phi}.q$, ainsi que sa différentielle en l'élément neutre de S^1 qui est $d_1 r_q : \mathbb{R} \rightarrow F_q, a \mapsto aX_q$.

Définition 3.4.5. La **section canonique** α de $Hom(F, \mathbb{R})$ est définie par $\alpha_q = (d_1 r_q)^{-1} : aX_q \mapsto a$.

Définition 3.4.6. Soit $\pi : P \rightarrow M$ un S^1 -fibré avec une connexion H , la **1-forme de connexion associée à H** est définie par

$$\omega = \alpha \circ p_H,$$

où p_H est la projection sur F parallèlement à H .

Proposition 3.4.7. Soit $\pi : P \rightarrow M$ un S^1 -fibré principal, avec H une connexion de P , et ω la forme de connexion associée. Alors Il existe une unique 2-forme Ω sur M , telle que $\pi^* \Omega = d\omega$. Cette forme s'appelle **la forme de courbure de la connexion principale H** .

Pour la preuve, voir [Son15, Définition 11.1, Théorème 11.2].

Définition 3.4.8. Soit $\pi : P \rightarrow M$ un S^1 -fibré principal, H une connexion de P , et choisissons $x_0 \in M$ un point de base. Pour toute courbe lisse fermée $p : [0, 1] \rightarrow M$ avec $p(0) = x_0 = p(1)$, soit $\eta : [0, 1] \rightarrow P$ un relèvement horizontal de p . Nous définissons $\delta \in S^1$ par $\eta(1) = \delta \cdot \eta(0)$. Nous appelons δ **l'holonomie** de p par rapport à H , noté $Hol(p)$.

En fait, la relèvement horizontal η n'est pas unique, mais l'holonomie ne dépend pas du choix (voir [KN96, Proposition 3.2]).

En fait, en appliquant la méthode de la Proposition 3.3.3 à des cas plus généraux, nous avons essentiellement démontré le résultat suivant:

Proposition 3.4.9. Soit $\pi : P \rightarrow M$ un S^1 -fibré principal sur une variété lisse M . Soit H une connexion et Ω sa courbure. Soit x_0 un point de M et p une courbe fermée lisse basante au point x_0 . Supposons qu'il existe un plongement du disque $c : D^2 \rightarrow M$ tel que $p = \partial c : S^1 \rightarrow M$. Alors

$$\int_c \Omega = -Hol(p).$$

Démonstration. Soit ω la forme de connexion sur P , puis par Proposition 3.4.7, nous avons $\pi^* \Omega = \omega$. Soit $\eta : [0, L] \rightarrow P$ un relèvement horizontal de p et soit $\eta(L) = e^{i\delta} \eta(0)$, alors $\delta = Hol(p)$. Définissons $\xi : [0, L] \rightarrow P$ par $\xi(t) = e^{-i\frac{t}{L}\delta} \eta(t)$, puis $\xi(0) = \xi(L)$. Comme dans la preuve de Proposition 3.3.3, nous construisons $h : S^1 \times I \rightarrow P$ tels que $h(t, 0) = \xi(t)$. Un même calcul montre que

$$\int_c \Omega = \int_0^L \omega(\xi'(t)) dt - 2k\pi,$$

où $k \in \mathbb{Z}$. On utilise la définition de ω et le fait que η est horizontal pour montrer que $\omega(\xi'(t)) dt = -\frac{\delta}{L}$. Le résultat suit. \square

3.4.1 Exemple: Fibration de Hopf

Lemme 3.4.10. La fibration de Hopf $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ est un S^1 -fibré principal, l'action à gauche de S^1 étant donnée par $e^{i\phi} \cdot q = e^{i\phi} q$.

Ici la notation $e^{i\phi} \cdot q$ signifie l'action de $e^{i\phi}$ sur $q \in S^3$, tandis que la notation $e^{i\phi} q$ signifie la multiplication dans les quaternions \mathbb{H} .

Démonstration. L'action de S^1 sur S^3 correspondant à la fibration de Hopf π a déjà été introduite dans la section 3.1. Le fait que cette action est libre et transitive sur chaque fibre est évident, car les fibres sont des cercles. \square

Dans le cas de la fibration de Hopf, nous avons $X_q = \frac{d}{dt} |_{t=0} e^{it} \cdot q = iq$, donc $F_q = \mathbb{R}iq$.

Nous fixons une connexion sur ce S^1 -fibré principal en choisissant pour chaque $q \in S^3$, le sous-espace à deux dimensions $H_q \subset T_q S^3$ tel que $H_q \perp F_q$. Ici, la métrique

riemannienne est induite par l'espace ambiant \mathbb{H} avec sa métrique euclidienne naturelle. En fait nous avons

Lemme 3.4.11. *Dans la fibration de Hopf $\pi : S^3 \rightarrow S^2$, il existe une connexion définie par $H_q = \mathbb{R}jq \oplus \mathbb{R}kq$ telle que $H_q \perp F_q$ en chaque point q de S^3 .*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\langle iq, jq \rangle = 0 = \langle iq, kq \rangle$ pour chaque $q \in S^3$. Mais on sait que les multiplications à gauche et à droite par les éléments de S^3 sont des isométries et que $\langle i, j \rangle = 0 = \langle i, k \rangle$. \square

Le Lemme 3.2.1 peut être reformulé comme suit:

Lemme 3.4.12. *Dans la fibration de Hopf $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ avec la connexion $H_q = \mathbb{R}jq \oplus \mathbb{R}kq$, toute courbe lisse p dans M a un relèvement horizontal η .*

Nous avons aussi

Lemme 3.4.13. *La section canonique α de la fibration de Hopf est donnée par $\alpha_q : F_q \rightarrow \mathbb{R} : aiq \mapsto a$.*

Lemme 3.4.14. *Dans la fibration de Hopf $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ avec la connexion $H_q = \mathbb{R}jq \oplus \mathbb{R}kq$, la forme de connexion ω est*

$$\omega_q(aiq + bjq + ckq) = a.$$

C'est exactement la même forme ω qu'on a vu dans le Lemme 3.3.1.

Démonstration. La première affirmation découle de la définition de connexion et du Lemme 3.4.13. Pour la seconde, noter que $\omega_q(aiq + bjq + ckq) = a = \langle aiq + bjq + ckq, iq \rangle = \langle aiq + bjq + ckq, X(q) \rangle$. Donc ω est bien la forme duale du champ de vecteurs X . \square

Le resultat du Lemme 3.3.1 se réécrit maintenant comme

Proposition 3.4.15. *Dans la fibration de Hopf $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ avec la connexion $H_q = \mathbb{R}jq \oplus \mathbb{R}kq$, soit ω la forme de connexion et Ω la forme de courbure. Soit dV la forme de volume standard de S^2 . Alors on a*

$$\Omega = \frac{1}{2}dV.$$

Finalement, la Proposition 3.3.3 est un cas particulier du Théorème 3.4.9. Et c'est l'approche de Pinkall à la Proposition 3.3.3 dans [Pin85].

3.4.2 Exemple: Fibré tangent unitaire d'une surface riemannienne

Dans le cas d'un S^1 -fibré principal $SM = \{v \in TM : |v|^2 = 1\}$ apparaissant sous la forme d'un fibré tangent unitaire d'une surface riemannienne (M, g) , nous avons

Lemme 3.4.16. *Il existe une connexion H sur SM telle que*

1. *La connexion affine associée sur TM de H est la connexion de Levi-Civita;*
2. *La forme de courbure de H est $-KdA$, où K est la courbure de Gauss et dA est la forme de volume;*
3. *Soit p une courbe lisse sur M , est soit $v \in S_{p(0)}M$, alors le relèvement horizontal de p à partir de v est la même chose que le transport parallèle de v le long de p .*
4. *Soit p une courbe lisse sur M et $p(0) = p(1)$, alors l'holonomie de p est la $S^1 = SO(T_{p(0)}M)$ -rotation associée au transport parallèle le long de p .*

Pour la notion de connexion affine associée, voir [KN96, Chapitre 3, Sections 2,3]. Notons ici que l'holonomie par rapport à la connexion principale est la même que l'holonomie par rapport à la connexion affine associée. Pour une preuve du lemme, ainsi que du corollaire suivant, voir [ST76, Chapitre 7.2 Théorème, Chapitre 7.3 Théorème 1].

Proposition 3.4.17. *Soit M une variété riemannienne de dimension 2 avec la courbure de Gauss K et une forme de volume dA . Soit aussi $c : D^2 \rightarrow M$ un plongement du disque tel que ∂c est une courbe fermée lisse de M . Alors, on a $\int_c KdA = \text{Hol}(\partial c)$.*

Démonstration. Le résultat découle du lemme et de la proposition précédente. □

Rappelons la formule de Gauss-Bonnet:

Théorème 3.4.18. *Soit M une variété riemannienne de dimension 2 avec une courbure de Gauss K et une forme de volume dA . Soit aussi $c : D^2 \rightarrow M$ un plongement du disque tel que $p = \partial c$ est une courbe fermée lisse de M . Alors on a $\int_c KdA + \int_p \kappa_N = 2\pi$, où κ_N est la courbure géodésique le long de la courbe p .*

Pour une preuve du théorème et une preuve de la proposition suivante (qui est prouvé implicitement dans la preuve du théorème), voir [Lee18, Theorem 9.3].

Proposition 3.4.19. *Avec la notation comme ci-dessus, on a $\text{Hol}(p) = 2\pi - \int_p \kappa_N$.*

Donc la Proposition 3.4.9 se réduit à une formule de Gauss-Bonnet dans cette situation.

3.5 Cylindres et tores de Hopf

Soit $p : [0, L/2] \rightarrow S^2$ une courbe plongée simple de longueur L (de vitesse constante 2) et soit $\eta : [0, L/2] \rightarrow S^3$ le relevé de p comme dans le Lemme 3.2.1, qui est de longueur $L/2$ par le Lemme 3.2.2 (donc η a une paramétrisation unitaire).

On définit une immersion x du cylindre $[0, L/2] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans S^3 par:

$$x(t, \phi) = e^{i\phi}\eta(t).$$

On appelle x **le cylindre de Hopf** correspondant à la courbe p .

Proposition 3.5.1. *x est un plongement isométrique.*

Démonstration. L'application x est évidemment bien définie et lisse. On rappelle que, dans la preuve du Lemme 3.2.2, on a vu que $\eta' = u\eta$ avec $u \in \text{span}(1, j, k)$. Maintenant, calculons les dérivées partielles:

$$\partial_\phi x = e^{i\phi} i\eta, \partial_t x = e^{i\phi} u\eta.$$

Ils sont bien unitaires. De plus, ils sont orthogonaux, car $i \perp u \in \text{span}(1, j, k)$ et la multiplication par $e^{i\phi}$ est une isométrie. Donc x est un plongement isométrique. \square

D'après la proposition précédente, on pourrait alors penser que toute courbe fermée simple de longueur L donne la même tore plat dans S^3 . Mais en fait, un autre degré de liberté vient du fait qu'avant de coller le cylindre, on peut le "tourner" (voir Figure 1). La Proposition 3.3.3 précise comment on peut contrôler l'angle de la rotation — il dépend de l'aire délimitée par la courbe.

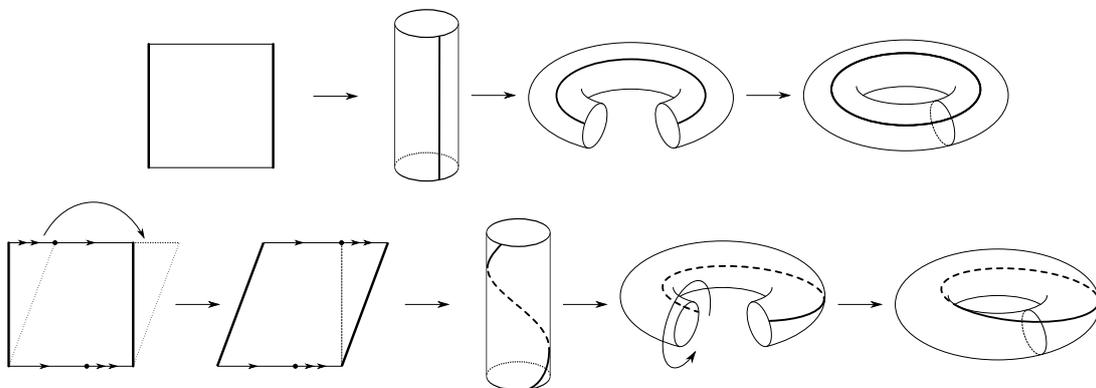


Figure 1: Torsion du tore

Soit maintenant $p : \mathbb{R}/\frac{L}{2}\mathbb{Z} \rightarrow S^2$ une courbe fermée simple de longueur L (de vitesse constante 2) qui délimite l'aire A . Soit aussi $\eta : \mathbb{R} \rightarrow S^3$ le relevé de p comme dans le Lemme 3.2.1, η ayant la paramétrisation unitaire. Définissons l'application $\hat{x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^3$ par $\hat{x}(t, \phi) = e^{i\phi}\eta(t)$.

Proposition 3.5.2. *L'application \hat{x} descend en un plongement isométrique $x : \mathbb{R}^2/\Gamma \rightarrow S^3$, où Γ est le réseau engendré par les vecteurs $(2\pi, 0)$ et $(\frac{A}{2}, \frac{L}{2})$. Il s'appelle **le tore de Hopf** correspondant à la courbe p (unique à une S^1 -rotation près).*

Démonstration. La Proposition 3.5.1 montre que \hat{x} est une isométrie locale, donc \hat{x} peut être considéré comme un revêtement riemannien du (ϕ, t) -plan sur notre tore de Hopf.

D'après la définition de \hat{x} et la Proposition 3.3.3 il est clair que le groupe des automorphismes du revêtement riemannien \hat{x} est engendré par translations de vecteurs $(2\pi, 0)$ et $(-\frac{A}{2}, \frac{L}{2}) = (\frac{A}{2}, \frac{L}{2})$.

Donc \hat{x} descend bien en un plongement isométrique $x : \mathbb{R}^2/\Gamma \rightarrow S^3$ \square

Remarque. Un argument similaire s'applique à tous les S^1 -fibrés principaux (voir section 3.4).

3.6 Classification des tores plats

Dans cette subsection nous allons classer tous les tores plats à homothétie près.

Lemme 3.6.1. *Deux tores plats \mathbb{R}^2/Γ_1 et \mathbb{R}^2/Γ_2 sont isométriques si et seulement s'il existe une transformation linéaire orthogonale $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $F(\Gamma_1) = \Gamma_2$.*

Démonstration. Si \mathbb{R}^2/Γ_1 et \mathbb{R}^2/Γ_2 sont isométriques, on relève l'isométrie entre tores plats en une isométrie de \mathbb{R}^2 qui fixe l'origine, d'où une transformation linéaire orthogonale $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Puisque F induit une bijection entre des tores plats, $F(\Gamma_1) = \Gamma_2$. La réciproque est évidente, puisque F induira une isométrie entre des tores plats. \square

Définition 3.6.2. *On dit qu'un tore plat T est homothétique de \mathbb{R}^2/Γ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que T est isométrique à $\mathbb{R}^2/\lambda\Gamma$.*

Corollaire 3.6.3. *Deux tores plats \mathbb{R}^2/Γ_1 et \mathbb{R}^2/Γ_2 sont homothétiques si et seulement s'il existe une transformation linéaire orthogonale $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, tels que $F(\Gamma_1) = \lambda\Gamma_2$.*

Nous définissons $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$, le **demi-plan supérieur**.

On note par e le vecteur $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Lemme 3.6.4. *Pour tout tores plats T , il existe un nombre réel positif $\lambda \in \mathbb{R}^+$, et un vecteur $v \in H$ tels que T est isométrique à \mathbb{R}^2/Γ , où $\Gamma = \lambda\langle e, v \rangle$.*

Démonstration. Supposons que $T = \mathbb{R}^2/\Gamma_1$. Nous pouvons toujours envoyer par rotation un de générateurs de Γ_1 sur $v_1 \in \mathbb{R}_+ \times \{0\}$, et l'autre — dans H . Puis nous faisons une homothétie qui envoie v_1 sur e . \square

On identifie H avec $\{z \in \mathbb{C} | \text{Im}z > 0\}$.

On rappelle les groupes classiques: $GL(2, \mathbb{Z})$ — matrices à coefficients entières de déterminant ± 1 ; $SL(2, \mathbb{Z})$ — matrices à coefficients entières de déterminant 1; $PGL(2, \mathbb{Z}) = GL(2, \mathbb{Z})/\pm \text{Id}$; $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\pm \text{Id}$.

Lemme 3.6.5. *Il existe une action de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur H donnée par*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Elle induit une action de $PSL(2, \mathbb{Z})$ sur H .

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \\ &= \frac{a_1 a \tau + a_1 b + b_1 c \tau + b_1 d}{c_1 a \tau + c_1 b + d_1 c \tau + d_1 d} \\ &= \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \tau, \end{aligned}$$

C'est donc bien une action de $SL(2, \mathbb{Z})$. Les éléments $\pm \text{Id}$ de $SL(2, \mathbb{Z})$ agissent trivialement sur H , donc on obtient une action de $PSL(2, \mathbb{Z})$. \square

Soit $r : H \rightarrow H, z \mapsto -\bar{z}$. Puisque $r^2 = \text{id}$, il s'ensuit que r est un difféomorphisme.

Remarque. C'est claire que tout élément de $PGL(2, \mathbb{Z})$ est de la forme A ou RA , où $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Lemme 3.6.6. *Il existe une action de $PGL(2, \mathbb{Z})$ sur H telle que les éléments de la forme $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ agissent comme dans le Lemme 3.6.5 ci-dessus, et les éléments de la forme RA agissent comme $r \circ A$.*

Démonstration. Regardons deux groupes: $PGL(2, \mathbb{Z})$ et le groupe des difféomorphismes de H engendrée par l'action de $PSL(2, \mathbb{Z})$ et r . Tous les deux groupes sont des produits semi-direct de $PSL(2, \mathbb{Z})$ et \mathbb{Z}_2 . Il suffit de montrer que \mathbb{Z}_2 agit par conjugaison sur $PSL(2, \mathbb{Z})$ de la même manière dans chaque groupe, c'est à dire, $(RAR)\tau = rAr\tau, \forall \tau \in H$. Cela va donner que les groupes sont isomorphes. Calculons:

$$\begin{aligned} RAR &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \\ rAr\tau &= rA(-\bar{\tau}) = r \frac{-a\bar{\tau} + b}{-c\bar{\tau} + d} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \tau \end{aligned}$$

\square

Lemme 3.6.7. *Soit $\Gamma_1 = \langle e, v_1 \rangle, \Gamma_2 = \langle e, v_2 \rangle$, où $v_1, v_2 \in H$, alors \mathbb{R}^2/Γ_1 est homothétique à \mathbb{R}^2/Γ_2 si et seulement s'il existe $A \in PGL(2, \mathbb{Z})$ tels que $v_2 = Av_1$.*

Démonstration. Supposons que \mathbb{R}^2/Γ_1 soit homothétique à \mathbb{R}^2/Γ_2 . Par le lemme précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+, F \in O(2)$ tel que $\Gamma_2 = \lambda F(\Gamma_1)$, en remplaçant v_2 par $r(v_2)$, on peut supposer que $F \in SO(2)$, qui est une rotation d'un angle θ , soit $z = \lambda e^{i\theta}$, alors $\langle e, v_2 \rangle = \langle ze, zv \rangle$. Ce qui implique qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ avec $ad - bc = 1$ tel que $v_2 = azv_1 + bze, e = czv_1 + dze$ (parce que l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice avec des coefficients entiers), en prenant le quotient, nous obtenons $v_2 = \frac{av_1 + b}{cv_1 + d}$. Pour l'inverse, nous inversons l'argument ci-dessus. \square

Corollaire 3.6.8. *Il existe une bijection entre l'ensemble des orbites de $PGL(2, \mathbb{Z})$ sur H et l'ensemble des classes homothétiques de tores plats.*

Pour visualiser l'action de $PGL(2, \mathbb{Z})$, voir Figure 2.

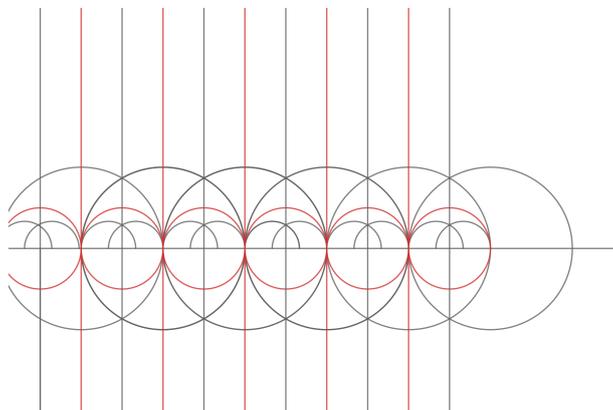


Figure 2: Le demi-plan supérieur est divisé en régions, et la fermeture de chaque région contient un ensemble complet de représentants de l'action de $PGL(2, \mathbb{Z})$. Dans le diagramme, nous n'avons pas noyé toutes les régions, en fait les régions sont disposées de manière fractale.

Proposition 3.6.9. *Soit $R_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, x^2 + y^2 \geq 1\}$, alors pour tout $v \in H$, il existe un unique $\tau \in R_1$ tel que v et τ sont dans la même orbite sous l'action de $PGL(2, \mathbb{Z})$.*

La preuve suivante est adaptée de [Apo90, Theorem 2.3].

Démonstration. Tout d'abord, considérons le réseau $\Gamma\langle 1, v \rangle$, si nous choisissons une autre base ω_1, ω_2 et soit $\Gamma_1 = \langle 1, \frac{\omega_1}{\omega_2} \rangle$, alors $\mathbb{R}^2/\Gamma, \mathbb{R}^2/\Gamma_1$ sont homothétiques. Soit $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2} \in H$, il résulte du Lemme 3.6.7 que v, τ sont dans la même orbite de $PGL(2, \mathbb{Z})$. Ensuite, nous choisissons ω_1, ω_2 de la manière suivante: nous organisons les éléments de $\Gamma\langle 1, v \rangle$ tel que $\Gamma\langle 1, v \rangle = \{0, w_1, w_2, \dots\}$, où $0 < |w_1| \leq |w_2| \leq \dots$, et $\arg(w_n) < \arg(w_{n+1})$ si $|w_n| = |w_{n+1}|$, et nous choisissons $\omega_1 = w_1, \omega_2$ le premier membre de cette séquence qu'il ne s'agisse pas d'un multiple de ω_1 . Ensuite, il en résulte que $\tau \in R_1 \cup r(R_1)$. Donc, la partie existence suit.

Inversement, nous montrons le caractère unique de $\tau \in R_1$. Nous devons prouver qu'il n'y a pas deux points distincts de R_1 qui sont équivalents sous $PGL(2, \mathbb{Z})$, soit $\tau_1 = A\tau$, où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Nous avons

$$Im(\tau_1) = \frac{Im(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

Si $\tau \in R_1$ et $c \neq 0$ nous avons

$$|c\tau + d|^2 = c^2\tau\bar{\tau} + cd(\tau + \bar{\tau}) + d^2 \geq c^2 - |cd| + d^2,$$

et l'égalité est obtenue si et seulement si $\tau = e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc si $d = 0$, nous trouvons $|c\tau + d|^2 > c^2 \geq 1$, et si $d \neq 0$ nous avons $c^2 - |cd| + d^2 = (|c| - |d|)^2 + |cd| \geq |cd| \geq 1$. Supposons que $\tau' = A\tau$ ou $\tau' = rA\tau$, avec $\tau', \tau \in R_1$ et $c \neq 0$. Ensuite, en considérant la partie imaginaire, nous trouvons que $\tau = \tau'$. (Notons que r ne change pas la partie imaginaire). On peut donc supposer que $c = 0$, alors on peut supposer que $a = d = 1$, et que la matrice $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ est une translation du vecteur $b \in \mathbb{Z}$. Donc $\tau' = A\tau$ ou $\tau' = rA\tau$ avec $\tau', \tau \in R_1$ implique que $\tau = \tau'$. Cela prouve l'unicité. \square

Par une dilatation de 2π , nous avons

Corollaire 3.6.10. *Pour tout tores plat T , il existe un unique point τ dans la région $R_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, x^2 + y^2 \geq 4\pi^2\}$ tel que T soit homothétique à $\mathbb{R}^2 / \langle 2\pi, \tau \rangle$.*

3.7 Exemples et fin de la preuve du Théorème 3.0.1

Regardons l'espace des classes homothétiques (Figure 3).

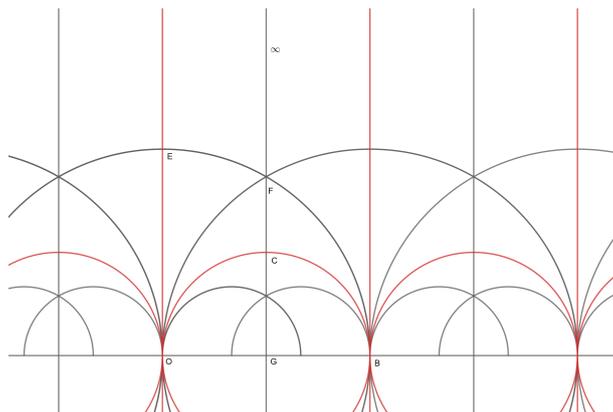


Figure 3

La Figure 3 est obtenu à partir de la Figure 2 par une homothétie de scalaire 2π .

Dans la figure, O correspond à l'origine, $G = (\pi, 0)$, $B = (2\pi, 0)$, $C = (\pi, \pi)$, et le cercle OCB a un rayon π et centre G . $E = (0, 2\pi)$, $F = (\pi, \sqrt{3}\pi)$ et le cercle contenant l'arc EF est le cercle de rayon 2π de centre O .

Définition 3.7.1. *Une courbe lisse simple fermée dans S^2 de longueur L et de l'aire orienté A (voir Définition 3.3.2) est de **type** $(\frac{\min(A, 4\pi - A)}{2}, \frac{L}{2})$.*

On rappelle l'inégalité isopérimétrique pour la sphère (voir [BZ88] pour la référence moderne).

Proposition 3.7.2. *Soit p une courbe lisse simple fermée dans S^2 de longueur L et de l'aire orienté A , nous avons alors*

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{2} - \pi\right)^2 \geq \pi^2.$$

Voir [BZ88, Theorem 2.2.1] pour la preuve de l'inégalité.

Remarque. Notons que l'inégalité est invariante par $(A, L) \mapsto (4\pi - A, L)$, i.e. par le changement d'orientation de la courbe p .

Il est clair que nous avons une bijection entre l'ensemble des types de courbes et la région $K = \{(x, y) | 0 < x \leq \pi, (x - \pi)^2 + y^2 \geq \pi^2\}$.

Il découle de la Proposition 3.5.2 que la courbe de type (a, b) correspond au tore de Hopf isométrique à $\mathbb{R}^2 / \langle (2\pi, 0), (a, b) \rangle$. Cela donne une application $\Phi : K \rightarrow H / PGL(2, \mathbb{Z})$, par le Corollaire 3.6.8.

Dans cette section, nous étudierons la cardinalité de l'image inverse de Φ .

Définition 3.7.3. *Nous disons qu'un tore plat T est un **tore rhombique**, si T est isométrique à \mathbb{R}^2 / Γ , où Γ a une paire de générateur $\{v_1, v_2\}$ tels que $|v_1| = |v_2|$.*

Ici, $|v|$ indique la longueur standard de $v \in \mathbb{R}^2$. Il est clair que si T_1 est homothétique à T_2 , alors T_1 est rhombique si et seulement si T_2 l'est (Lemme 3.6.3).

Proposition 3.7.4. *Pour $v \in H$, $\mathbb{R}^2 / \langle (2\pi, 0), v \rangle$ est rhombique si et seulement si l'orbite de v sous l'action de $PGL(2, \mathbb{Z})$ contient un représentant dans les arcs EF et $F\infty$, y compris les points E et F .*

Démonstration. Notons que l'arc $F\infty$ est envoyé à l'arc FB par un élément de $PGL(2, \mathbb{Z})$, donc on peut remplacer $EF, F\infty$ par EB , sans point B .

EB est un arc du cercle centré en zéro, donc si $v \in EB$, alors $(2\pi, 0)$ et v sont de la même longueur.

Inversement, supposons que $\mathbb{R}^2 / \langle (2\pi, 0), v \rangle$ est rhombique. Alors il existe deux vecteurs v_1 et v_2 de la même longueur tels que $\mathbb{R}^2 / \langle (2\pi, 0), v \rangle = \mathbb{R}^2 / \langle v_1, v_2 \rangle$. Par une composition d'une isométrie et d'une homothétie de \mathbb{R}^2 , on peut envoyer v_1, v_2 sur $(2\pi, 0), v'$, où $|v'| = 2\pi$ et $v' \in H$. Alors $\mathbb{R}^2 / \langle (2\pi, 0), v \rangle$ est homothétique à $\mathbb{R}^2 / \langle (2\pi, 0), v' \rangle$ par le Corollaire 3.6.3. Il reste à noter que l'arc $\{x^2 + y^2 = 4\pi^2, x \leq 0, y > 0\}$ peut être envoyé sur l'arc EB par $R \in PGL(2, \mathbb{Z})$. \square

Définition 3.7.5. *Le **tore équilatéral** est le tore $\mathbb{R}^2 / \langle (2\pi, 0), (\pi, \sqrt{3}\pi) \rangle$.*

Définition 3.7.6. *Nous disons qu'un tore plat T est un **tore rectangulaire**, si T est isométrique à \mathbb{R}^2 / Γ , où Γ a une paire de générateur $\{v_1, v_2\}$ tel que $v_1 \cdot v_2 = 0$.*

Il est clair que si T_1 est homothétique à T_2 , alors T_1 est rectangulaire si et seulement si T_2 l'est (Lemme 3.6.3).

Proposition 3.7.7. *Pour $v \in H$, $\mathbb{R}^2 / \langle (2\pi, 0), v \rangle$ est rectangulaire si et seulement si l'orbite de v sous l'action de $PGL(2, \mathbb{Z})$ contient un représentant dans l'arc $E\infty$, y compris le point E .*

La preuve de cette proposition est similaire à celle de la Proposition 3.7.4.
 Notons qu'il existe un élément de $PGL(2, \mathbb{Z})$ qui envoie l'arc $E\infty$ sur l'arc CO .

Définition 3.7.8. *Le tore carré est le tore $\mathbb{R}^2 / \langle (2\pi, 0), (\pi, \pi) \rangle$.*

Théorème 3.7.9.

- (1) *Le tore équilatéral a un unique représentant dans K ;*
- (2) *Chaque tore rectangulaire a un unique représentant dans K ;*
- (3) *Chaque tore rombigue non-équilatéral et non-carré a 2 représentants dans K ;*
- (4) *Tous les autres tores ont 3 représentants dans K .*

Démonstration. Soit K_1 l'intérieur de la région $\infty EF\infty$, K_2 l'intérieur de la région OEF , K_3 l'intérieur de la région OFC .

Pour $(a, b) \in K$, il résulte du Corollaire 3.6.8 que $\#\Phi^{-1}(\Phi(a, b)) = \#(G.(a, b) \cap K)$.

D'autre part, l'inversion par rapport au cercle EFB est donnée par la formule $i_1 : z \mapsto \frac{4\pi^2}{\bar{z}}$, qui envoie $\overline{K_1}$ bijectivement sur $\overline{K_2}$, en fixant les points sur l'arc EF , et l'inversion par rapport au cercle OF est donnée par la formule $i_2 : z \mapsto \frac{4\pi^2}{z-2\pi} + 2\pi$, qui envoie $\overline{K_2}$ bijectivement sur $\overline{K_3}$, en fixant les points sur l'arc OF .

Donc pour les points à l'intérieur de K_1, K_2, K_3 , $\#(G.(a, b) \cap K) = 3$, par exemple, si $(a, b) \in K_1$, alors $G.(a, b) = \{(a, b), i_1(a, b), i_2 i_1(a, b)\}$. Une discussion similaire s'applique à tous les autres cas. \square

Remarque. Notons que d'après la preuve de la proposition précédente, il est clair que Φ est surjectif, donc le Théorème 3.0.1 suit.

4 C^1 -plongement dans \mathbb{R}^3

4.1 L'affirmation du résultat

Soit (M, g) une variété riemannienne, et soit (\mathbb{R}^3, can) l'espace euclidien de dimension 3.

Définition 4.1.1. *Un C^1 plongement isométrique entre deux variétés riemanniennes (M, g_M) et (N, g_N) est un C^1 plongement $f : M \rightarrow N$ dont l'application tangente en tout point est une isométrie sur son image.*

Soit $T = \mathbb{R}^2 / \langle 1, i \rangle$ munie de la métrique standard, c'est le tore carré (voir Définition 3.7.8).

Théorème 4.1.2. *Il existe un C^1 -plongement isométrique $T \rightarrow (\mathbb{R}^3, can)$.*

Pour plus de détails de la preuve de cette théorème, nous renvoyons à [BJLT13].

Notons que la preuve de l'impossibilité du plongement isométrique dans \mathbb{R}^3 utilise la courbure, mais on ne peut pas parler de la courbure d'un plongement de classe C^1 .

Nous allons expliquer l'idée de la preuve.

Nous mentionnons ici le théorème de Nash-Kuiper, selon lequel tout tore plat admet un plongement isométrique dans \mathbb{R}^3 . Il a été prouvé initialement par Nash et Kuiper,

voir [Nas54] et Kuiper [Kui55]. Cependant, dans cette section, nous suivons l'article excellent de Borrelli et al. [BJLT13].

4.2 Intégration convexe de dimension 1

La technique de la construction de ce plongement isométrique est l'intégration convexe. Nous allons expliquer la technique par un exemple de dimension 1.

Soit $I = [0, 1]$, muni d'une métrique $\mu = \mu(x)dx$, où $\mu(x) > 0$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un plongement de classe C^1 , tel que $|f'(x)| < \mu(x)$, et on dit que f est **court** dans ce cas.

On peut ([BJLT13, Section 2.2]) donc choisir une famille $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $h(x, t) \in S^2(\mu(x))$, $\forall x, t$, et

$$\int_0^1 h(x, u) = f'(x), \forall x \in I.$$

Où $S^2(\mu(x))$ est la sphère de dimension 2 et de rayon $\mu(x)$.

Nous définissons

$$F_N(t) = f(0) + \int_0^t h(x, \{Nx\})dx, \quad (1)$$

où $N \in \mathbb{N}$. Alors $F'_N(t) = h(t, \{Nt\})$, de sorte que $|F'_N(t)| = \mu(t)$, et F_N est donc une C^1 -immersion isométrique. On vérifie que $\|F_N - f\|_\infty = O(\frac{1}{N})$, ([BJLT13, Lemma 1]) c'est-à-dire que F_N est C^0 -proche de f . Puisque f est un plongement, pour N assez grand, F_N est donc un plongement isométrique de classe C^1 .

La construction (1) est l'intégration convexe. Avec cette construction, nous avons prouvé que

Proposition 4.2.1. *Si il existe un plongement de classe C^1 court $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ par rapport à une métrique μ , alors il existe un plongement de classe C^1 isométrique $F : (I, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, can)$.*

Remarque. Pour une preuve facile de la proposition précédente, on peut faire un changement de variable $s = \int_0^t \frac{|f'(u)|}{\mu(u)} du$. Mais cet argument est difficile à généraliser à dimension 2. En revanche, il est possible de faire l'intégration convexe dans dimension 2.

4.3 Intégration convexe de dimension 2, cas primitif

Soit $T = \mathbb{R}^2 / \langle 1, i \rangle$ comme avant, mais munie d'une métrique μ , et soit $f : (T, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, can)$ un plongement de classe C^1 court. De plus, supposons que $\mu = f^*can + \rho l \otimes l$, où $\rho : T \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction strictement positive, et $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une transformation linéaire, telle que $\exists V \in Ker(l), 0 \neq V \in \mathbb{Z}^3$. Dans ce cas, on dit que μ diffère de f^*can par une métrique primitive.

On peut choisir $U \in \mathbb{R}^2$ telle que (U, V) est une base orthogonale directe et $|U||V| = 1$. On obtient une paramétrisation $\phi : Cyl = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times I \rightarrow T$, $(s, t) \mapsto tV + sU$. Nous

appliquons l'intégration convexe au plongement de classe C^1 court $f \circ \phi_t : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto f(\phi(s, t))$:

$$F : \text{Cyl} \rightarrow \mathbb{R}^3, F \circ \phi_t(s) = f(tV) + \int_0^s h(t, u, \{Nu\}) du. \quad (2)$$

On vérifie que $F^* \text{can}(U, U)$ est proche de $\mu(U, U)$ par construction, et que $F^* \text{can}(V, V)$ est proche de $\mu(V, V)$, car $l(V) = 0$. Mais un calcul direct montre que $F^* \text{can}(U, V)$ et $\mu(U, V)$ ne sont pas proches, si $\mu(U, V) \neq 0$. ([BJLT13, Section 2.3.1])

Afin de résoudre ce problème, nous remplaçons U par W où $W = U + \zeta V$ telle que $\mu(U, V) = 0$. Soit ϕ_t la courbe intégrale de W , $\phi(t, s) = sU + \psi(t, s)V$, et nous redéfinissons F par la même formule (2). On peut montrer que F est proche de f et que $F^* \text{can}$ est proche de μ .

Un autre problème est que F n'est pas une application sur T , car F prend des valeurs différentes sur les frontières de Cyl . Afin de résoudre ce problème, nous choisissons une fonction $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que $w(0) = 0, w(1) = 1, w^k(0) = 0 = w^k(1), \forall k \geq 1$, et nous définissons

$$\bar{F}(\phi(t, s)) = F(\phi(t, s)) - w(s)(F(\phi(t, 1)) - f(\phi(t, 1))). \quad (3)$$

On peut trouver une preuve du théorème suivant dans [BJLT13, Theorem 10].

Théorème 4.3.1. *Avec la notation comme ci-dessus, on peut choisir h telle que*

1. $\|\bar{F} - f\|_\infty \leq \frac{K_1(h)}{N}$ et $\|\bar{F} - f\|_\infty \leq 2\sqrt{7}|U|\|\rho\|_\infty^{\frac{1}{2}}$,
 2. $\|d\bar{F} - df\|_\infty \leq \frac{K_2(h, \zeta, \psi, w)}{N} + \sqrt{7}|U|\|\rho\|_\infty^{\frac{1}{2}}$,
 3. $\|d\bar{F}(V) - df(V)\|_\infty \leq \frac{K_3(h, \psi)}{N}$,
 4. $\|d\bar{F}(W) - df(W)\|_\infty \leq \sqrt{7}|U|(1 + \|w'\|_\infty)$, et
 5. $\|\mu - \bar{F}^* \text{can}\| \leq \frac{K_4(f \circ \phi, h, w', \phi)}{N}$.
- où K_1, K_2, K_3, K_4 sont des constantes.

4.4 Intégration convexe de dimension 2, cas général

Soit g la métrique standard sur $T = \mathbb{R}^2 / \langle 1, i \rangle$, et soit $f_0 : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ un plongement court. Soit $\Delta = g - f_0^* \text{can}$.

On prend $l_1 = dx, l_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(dx + 2dy), l_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(dx - 2dy)$. Alors chaque métrique D sur T admet une décomposition unique: $D = \rho_1(D)l_1 \otimes l_1 + \rho_2(D)l_2 \otimes l_2 + \rho_3(D)l_3 \otimes l_3$, où ρ_i est une fonction sur T . Soit $C = \{D | \rho_i(D) > 0\}$, et supposons que $\Delta \in C$. Donc Δ et la somme de trois métriques primitives.

Soit (δ_k) une suite croissante de nombres positifs convergeant vers 1. Nous appliquons le Théorème 4.3.1 trois fois à $\mu = f_0^* \text{can} + \delta_1 \rho_1(\Delta)l_1 \otimes l_1$, $\mu = f_0^* \text{can} + \delta_1 \rho_1(\Delta)l_1 \otimes l_1 + \delta_1 \rho_2(\Delta)l_2 \otimes l_2$ et $\mu = f_0^* \text{can} + \delta_1 \rho_1(\Delta)l_1 \otimes l_1 + \delta_1 \rho_3(\Delta)l_3 \otimes l_3$, et nous obtenons une nouvelle application $f_1 : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f_1^* \text{can}$ et $f_0^* \text{can} + \delta_1 \Delta$ sont proches ([BJLT13, Theorem 11]).

Nous appliquons la même procédure, et nous obtenons une nouvelle application $f_2 : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f_2^* \text{can}$ et $f_0^* \text{can} + \delta_2 \Delta$ sont proches. Nous faisons la même chose

inductivement, et finalement nous obtenons une suite (f_k) . On montre que si (δ_k) sont bien choisis, alors (f_k) converge par rapport à C^1 -topologie. Soit f_∞ la C^1 -limite de (f_k) , alors f_∞ est un C^1 -plongement isométrique $(T, g) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \text{can})$ ([BJLT13, Theorem 17]).

C'est l'idée de la preuve du Théorème 4.1.2.

5 Plongements linéaires par morceaux

Bien qu'il est impossible de plonger isométriquement de manière lisse des tores plats dans \mathbb{R}^3 , il se trouve que, dans les cas spécifiques, on peut le faire linéairement par morceaux.

Définition 5.0.1. *Soit Γ un réseau de \mathbb{R}^2 . L'application $f : \mathbb{R}^2/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite un **plongement isométrique linéaire par morceaux** si*

- *f est une plongement au sens topologique;*
- *il existe un recouvrement finie de \mathbb{R}^2/Γ tel que la restriction de f à chaque élément du recouvrement est une isométrie linéaire (composition de rotation et de translation) sur un polygone plat dans \mathbb{R}^3 .*

Notons qu'un tel plongement correspond au pliage de la feuille de papier à la manière d'un "origami". C'est à dire, les plis sont droits et ils sont faits sans déchirer le papier. Donc on va appeler une telle application le *pliage*. On peut aussi dire qu'une *surface est pliée d'une autre*.

Alors, dans cette partie, on va prouver le résultat suivant:

Théorème 5.0.2. *Soit T un tore plat qui vient du parallélogramme $P \subset \mathbb{R}^2$ (dont les côtés opposés on identifie). Si P a deux côtés opposés dont la longueur est suffisamment plus petite que la distance entre eux, alors il existe un plongement isométrique linéaire par morceaux de T dans \mathbb{R}^3 .*

La preuve va suivre l'article [Zal97].

5.1 Pliage d'un cylindre

On commence par un lemme préliminaire (dans la suite, tout se passe dans \mathbb{R}^3).

Lemme 5.1.1. *Soit un triangle isocèle ABC ($CA = CB$) est plié le long de sa hauteur CD est placé de manière suivant: les côtés CA et CB sont dans le plan H , est l'angle entre les plans ADB et H est égale à $\alpha \in]0, \pi/2[$.*

Alors on peut le plier de sorte que CA et CB restent fixés, l'angle entre le nouveau plan ADB et H est égale à $\beta \in]0, \alpha[$, et toute la construction reste d'un côté du plan ADB .

Démonstration. Notons $\delta = \alpha - \beta$ et considérons deux cas.

Premier cas: $\beta > \frac{\delta}{2}$.

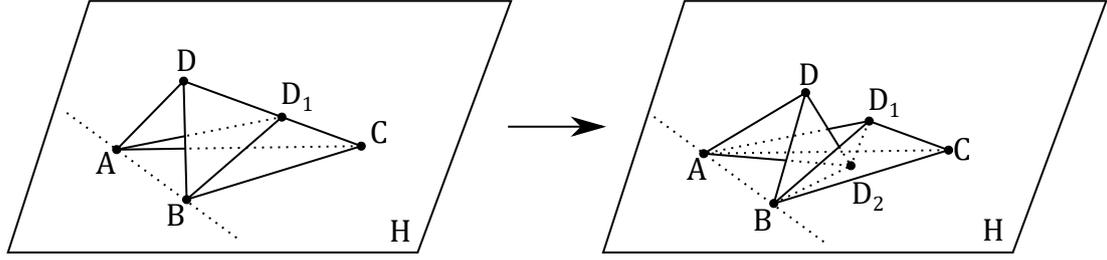


Figure 4: Pliage d'un triangle

Prenons le point $D_1 \in CD$ tel que l'angle entre les plans H et AD_1B soit égale à $\delta/2$ (voir Figure 4, gauche). Puis réfléchons la partie au-dessus de AD_1B dans ce même plan. L'angle entre le nouveau plan ADB et H est égale à $\delta/2 - (\alpha - \delta/2) = -\beta < 0$ donc la partie reflétée intersecte le plan H en une ligne AD_2B . Finalement, réfléchons la partie au-dessous de H dans H . Après ces manipulations le triangle est plié en une forme montrée dans la Figure 4, droit. Le nouveau angle entre H et ADB est bien égale à $-(-\beta) = \beta$. De plus, comme $\beta > \delta/2$, le plan AD_1B est bien du même côté de ADB que C .

Deuxième cas: $\beta \leq \frac{\delta}{2}$.

Prenons un entier $n \geq 1$ tel que $\beta > \frac{\delta}{2n}$, et D_1 tel que l'angle entre AD_1B et H est $\delta/2n$. Puis on répète successivement les réflexions dans AD_1B et H n fois. Comme dans le premier cas, on montre que l'angle souhaité diminue par δ/n à chaque fois, et la construction reste toujours d'un côté du plan ADB . \square

Maintenant, prenons un cylindre plat. En le pliant, on peut lui donner la forme de prisme dont la section orthogonale est un triangle régulier. On va plier ce cylindre par angle $\phi \in]0, \pi[$ le long du segment CC' (C et C' appartiennent aux arêtes du cylindre, CC' est orthogonale à ces arêtes).

Pour cela, coupons deux triangles isocèles égaux ABC et ABC' de notre cylindre (Figure 5, en haut). Soit λ l'angle qu'on a choisi en sommets C et C' . Plions la nouvelle construction le long de CC' par angle ϕ . Les nouveaux angles $\angle ACB = \angle AC'B = \mu < \lambda$ (Figure 5, en bas).

Remarque. Pour chaque $\phi \in]0, \pi[$ il existe la valeur λ_0 de λ telle que l'angle entre les plans ACC' et BCC' soit égal à ϕ , et donc ces plans coïncident après le pliage par angle ϕ le long de CC' . On suppose que λ est choisi de sorte que $\lambda_0 < \lambda < \pi$. Dans ce cas la Figure 5 (en bas) est vraie qualitativement.

Puis, plions le triangle ABC le long de sa hauteur CD de sorte que $\angle ACB = \mu$ et le rattachons au cylindre de sorte que D est de côté du cylindre.

Sous les conditions de la Figure 5 (en bas), soit Q le plan contenant CC' qui coupe en deux les angles $\angle ACB$ et $\angle AC'B$. La Figure 6 (gauche) montre ce plan. Le point A' est la projection de A et B sur Q . Soit l la droite passant par A' qui est perpendiculaire à CC . C'est l'axe de symétrie de notre construction. Le point D (du triangle plié et

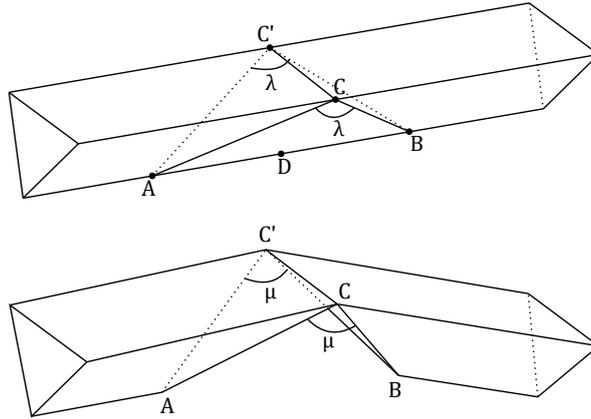


Figure 5: Pliage d'un cylindre

attaché ABC) est dans Q par symétrie. De plus, D est situé à gauche de l et au-dessous de CC' . En effet, $CD = CC'$ et $CD \perp DA'$ (comme $CD \perp DA$ et A' est une projection orthogonale de A). Donc $A'D$ est la tangente au cercle de centre C est rayon CC' (Figure 6, droit). C'est clair que tous les points D satisfaisant cette condition sont à gauche de l et au-dessous de CC' .

Alors $\alpha = \angle DA'C < \angle(l, A'C) = \beta$, et donc par le Lemme 5.1.1 on peut encore plier le triangle ABC de sorte que l'angle entre les plans ACB et ADB devienne β et toute le triangle ABC est finalement à droite de l .

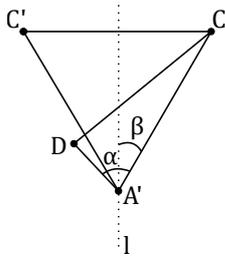


Figure 6: Le plan Q

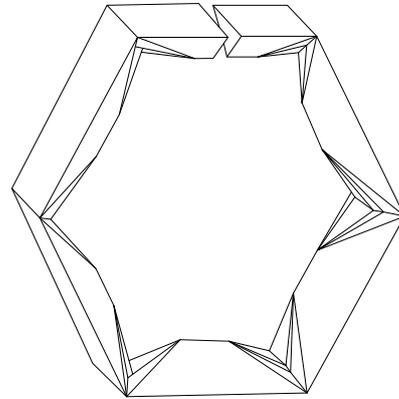
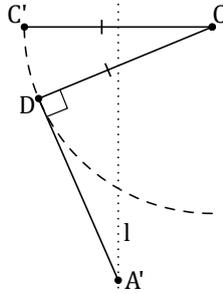


Figure 7

Cela garantit que, quand on fait la même procédure avec le triangle $AC'B$, les deux triangles se recollent bien le long du chemin ADB et ne s'intersectent plus nulle part. Donc on obtient une surface isométrique au cylindre donné. C'est à dire, on a

Proposition 5.1.2. *On peut plier un cylindre trièdre long par un angle $\phi \in]0, \pi[$ en direction de chaque de ces arêtes.*

Cette proposition donne en fait la preuve du Théorème 5.0.2 pour les tores venant de rectangles (suffisamment longs). En effet, d'abord on plie le rectangle en un cylindre trièdre dont la section orthogonale est un triangle régulier. Comme le cylindre est suffisamment long, on peut effectuer six “ $\pi/3$ -pliages” en direction de la même arête. A la fin, il est possible de recoller les bases du cylindre (voir Figure 7).

5.2 Rotation de structure des faces

Soit ABC un triangle régulier dans un plan P (Figure 8, gauche). Projétons ce triangle sur un plan P' qui est parallèle à P , puis tournons la projection autour de son centre par un angle $\alpha \in [-\pi/3, \pi/3]$. Cela donne un triangle $A'B'C'$. Si on lie les points $AA'BB'CC'A$ par une ligne polygonale, on obtient six triangles congruents (par rotation autour de l'axe commun des triangles ABC et $A'B'C'$):

$$AA'B = A'BB' = BB'C = B'CC' = CC'A = C'AA'.$$

On appelle la surface formée par ces triangles *le joint de rotation α* .

A chaque sommet du joint trois angles de triangles différents se rencontrent. Ces angles sont égaux aux trois angles de $AA'B$, par exemple. Donc leur somme est π . Cela veut dire, **le joint est isométrique au cylindre plat** dont le périmètre de la base est $AB + BC + CA$ et la hauteur h est égale à la hauteur $A'D$ de triangle $AA'B$.

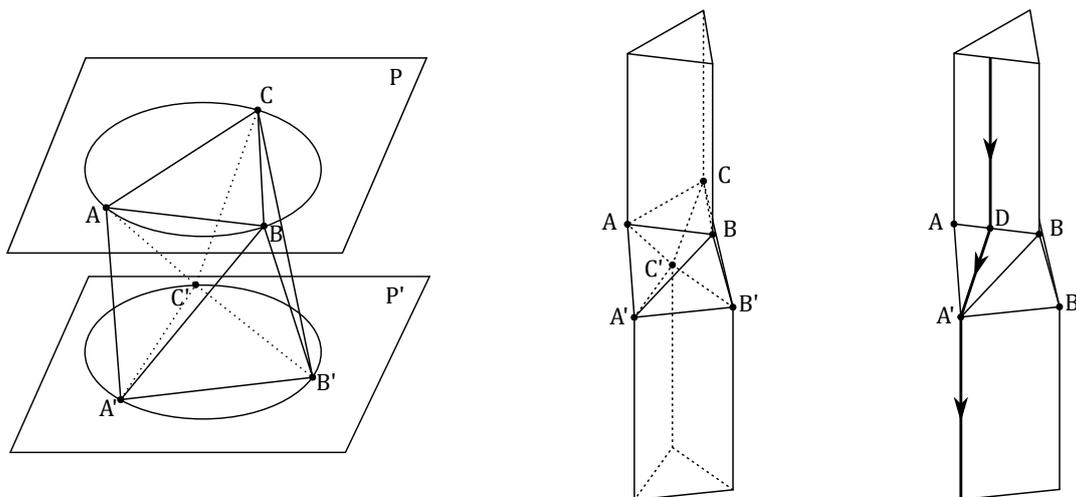


Figure 8: Le joint et la rotation de structure des faces

Prenons maintenant un cylindre dont la section orthogonale est égale à notre triangle ABC . Si on coupe un morceau du cylindre de longueur h et le remplace par notre joint de rotation α , puis tourne la partie en bas du cylindre par le même angle α , on obtien un pliage du cylindre initial (Figure 8, centre). Noter qu'essentiellement la structure des faces a été tournée par un angle α , et les parties du cylindre qui sont séparées par le joint ont le même axe.

Remarque. L'introduction du joint ne tourne que la structure des faces du cylindre. La "matière" ou la "métrique intrinsèque" de la surface ne sont pas tournées. Par exemple: soit $A'D$ la hauteur du triangle $AA'B$, et prenons la droite dans la première partie du cylindre perpendiculaire à AB et passant par D (voir Figure 8, droit). Cette droite est continue dans le joint par le segment DA' et puis, dans la deuxième partie, par l'arête passant par A' .

Remarque. Pour tous $\alpha \in [-\pi/3, \pi/3]$, la hauteur du joint peut être prise arbitrairement petite.

Les joints permet de prouver la proposition plus forte que la Proposition 5.1.2:

Proposition 5.2.1. *On peut plier un cylindre trièdre long par un angle $\phi \in]0, \pi[$ en toute direction.*

Démonstration. D'abord, ajouter le joint pour tourner les faces de sorte qu'on obtient une arête dans la direction voulue. Puis, on effectue le pliage standard en direction de cette arête. \square

5.3 Fin de la preuve

Il est bien connu que la somme d'angles d'un triangle sphérique est plus grande que π . Si on regarde la sphère unité, alors la différence entre cette somme et π est égale à l'aire de ce triangle.

Soit PQR un triangle sphérique sur la sphère unité de centre O . On imagine une tige le long de OP fixée dans le point O avec un disque orthogonal à OP fixé dans le point P (voir Figure 9). Marquons un rayon sur ce disque. Puis, on tourne la tige dans les positions $OQ - OR - OP$ sans tourner la tige autour de son axe. La tige revient à sa position initiale, mais le rayon sur le disque ne l'est pas. Par le théorème de Gauss-Bonnet, il tourne par angle égal à l'aire de triangle sphérique PQR .

On peut aussi le voir comme suit. La composition de trois rotations qu'on ait c'est encore une rotation qui fixe le point P . Donc c'est une rotation autour de OP par un certain angle. Le calcul explicite donne la valeur de ce angle.

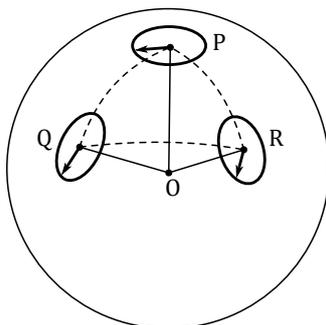


Figure 9

Passons à la preuve du Théorème 5.0.2 dans le cas general. On a déjà vu qu'un tore plat quelconque peut être obtenu en collant les bases d'un cylindre plat, mais, en général, l'une des bases doit être "tournée" avant cela par un certain angle $\alpha \in]0, 2\pi[$ (Figure 1).

Prenons un triangle sphérique PQR d'aire α . Soit $M_1M_2M_3M_4M_5$ une ligne polygonalement telle que les directions des segments $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5$ sont les mêmes que des vecteurs OP, OQ, OR, OP respectivement. Par Proposition 5.2.1, en prenant les longueurs de ces segments suffisamment grandes, on peut plier un cylindre plat trièdre de manière que ces segments sont des axes des parties du cylindre (voir Figure 10). Par nos considérations précédentes, la "matière" ou la "métrique intrinsèque" du cylindre est tournée par angle α autour de l'axe du cylindre. En effet, pendant les pliages, la "matière" fait les mêmes rotations que le disque fixé sur la tige dans la Figure 9.

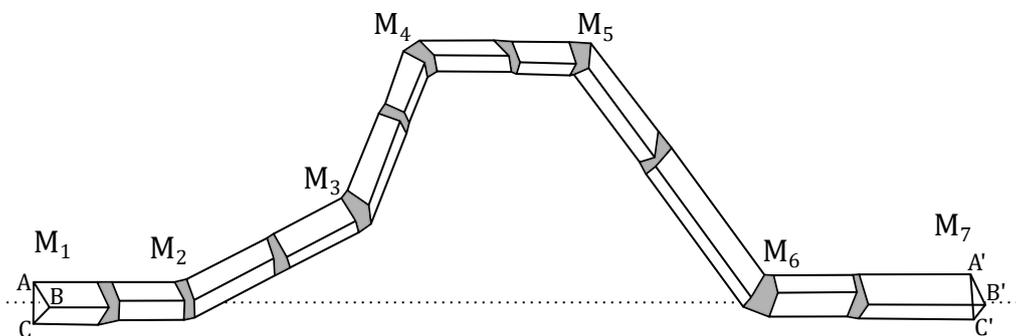


Figure 10

Ajoutons encore deux segments M_5M_6 et M_6M_7 pour que les sections orthogonales initiale et finale ABC et $A'B'C'$ ont le même axe et leur côtés sont parallèles. Cette opération ne tourne pas la matière du cylindre.

Finalement, pour le cylindre trièdre long dont les bases on veut coller avec rotation par angle α , d'abord on fait six " $\pi/3$ -pliages" comme dans la Figure 7, puis on insère la construction de la Figure 10 à l'une de parties du cylindre. Cela donne le pliage du tore voulu et donc la preuve du Théorème 5.0.2.

Bibliographie

- [Apo90] Tom M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
- [BJLT13] Vincent Borrelli, Saïd Jabrane, Francis Lazarus, and Boris Thibert. *Isometric embeddings of the square flat torus in ambient space*, volume 24 of *Ensaïos Matemáticos [Mathematical Surveys]*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

- [BK87] Steven R. Bell and Steven G. Krantz. Smoothness to the boundary of conformal maps. *Rocky Mountain J. Math.*, 17(1):23–40, 1987.
- [BZ88] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller. *Geometric inequalities*, volume 285 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics.
- [Cai51] Stewart S. Cairns. An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:860–867, 1951.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [KN96] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Kui55] Nicolaas H. Kuiper. On C^1 -isometric imbeddings. I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*. **58** = *Indag. Math.*, 17:545–556, 683–689, 1955.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [Lee18] John M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2018. Second edition of [MR1468735].
- [Nas54] John Nash. C^1 isometric imbeddings. *Ann. of Math. (2)*, 60:383–396, 1954.
- [Pet16] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, third edition, 2016.
- [Pin85] U. Pinkall. Hopf tori in S^3 . *Invent. Math.*, 81(2):379–386, 1985.
- [Son15] Stephen Bruce Sontz. *Principal bundles*. Universitext. Springer, Cham, 2015. The classical case.
- [ST76] I. M. Singer and J. A. Thorpe. *Lecture notes on elementary topology and geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. Reprint of the 1967 edition, Undergraduate Texts in Mathematics.
- [Zal97] V. A. Zalgaller. Some bendings of a long cylinder. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 246(Geom. i Topol. 2):66–83, 197, 1997.