

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe.

Von G. Frobenius.

(Vorgetragen am 26. April [s. oben S. 417].)

Die sämmtlichen Permutationen von n Symbolen $1, 2, \cdots n$ sind die Elemente einer Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $h = n!$, die man die *symmetrische* nennt. Eine Permutation kann stets und nur in einer Weise als Product von cyklischen Vertauschungen dargestellt werden, von denen nicht zwei ein Symbol gemeinsam haben. Damit zwei Permutationen in Bezug auf $\mathfrak{H}$ conjugirt seien, ist nothwendig und hinreichend, dass sie aus gleich vielen Cyklen derselben Ordnung zusammengesetzt sind. Bestehen die Permutationen der ρ^{ten} Classe ($\rho = 0, 1, \cdots k-1$) aus α Cyklen der Ordnung 1, β Cyklen der Ordnung 2, γ Cyklen der Ordnung 3, $\cdots$, so ist ihre Anzahl nach Cauchy gleich

$$h_\rho = \frac{n!}{1^\alpha \alpha! 2^\beta \beta! 3^\gamma \gamma! \cdots}. \tag{1.}$$

Die Anzahl k der Classen conjugirter Elemente, worin die h Permutationen zerfallen, ist gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$n = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots \tag{2.}$$

durch positive ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, die auch Null sein können, oder auch gleich der Anzahl der verschiedenen Zerlegungen der Zahl

$$n = n_1 + n_2 + \cdots \tag{3.}$$

in eine unbestimmte Anzahl positiver Theile.

Um die k Charaktere der Gruppe $\mathfrak{H}$

$$\chi_\rho^{(\varkappa)} \qquad (\rho = 0, 1, \cdots k-1;\ \varkappa = 0, 1, \cdots k-1)$$

zu berechnen, benutze ich k bestimmte Untergruppen von $\mathfrak{H}$. Nachdem die Zahl n in die Summanden (3.) zerlegt ist, bilde man alle Permutationen, die nur die ersten n_1 Symbole unter sich vertauschen, ebenso nur die folgenden n_2 Symbole, u. s. w. Diese Permutationen bilden eine Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung

$$g = n_1! n_2! \cdots. \tag{4.}$$

Jede Permutation R von $\mathfrak{G}$ zerfällt in eine Permutation R_1 unter den ersten n_1 Symbolen, eine Permutation R_2 unter den folgenden n_2 Sym-

Digitized by Google

bolen, u. s. w. Besteht R_ν aus α_ν Cyklen der Ordnung 1, β_ν Cyklen der Ordnung 2, $\cdots$, so ist

$$(5.) \qquad n_1 = \alpha_1 + 2\beta_1 + \cdots, \qquad n_2 = \alpha_2 + 2\beta_2 + \cdots, \quad \cdots,$$

und wenn R in $\mathfrak{H}$ der ρ^{ten} Classe angehört,

$$(6.) \qquad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots, \qquad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots.$$

Die Anzahl der in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Permutationen dieser Classe ist daher

$$g_\varrho = \Sigma \frac{n_1!}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\, 2^{\beta_1}\beta_1! \cdots} \cdot \frac{n_2!}{1^{\alpha_2}\alpha_2!\, 2^{\beta_2}\beta_2! \cdots} \cdots,$$

die Summe erstreckt über alle Lösungen der Gleichungen (5.) und (6.). Haben diese Gleichungen keine Lösung, so ist $g_\varrho = 0$. Sonst ist, da

$$(7.) \qquad \frac{h}{h_\varrho} = 1^\alpha \alpha! 2^\beta \beta! 3^\gamma \gamma! \cdots$$

ist,

$$\frac{h g_\varrho}{g h_\varrho} = \Sigma \frac{\alpha!}{\alpha_1!\alpha_2! \cdots} \cdot \frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2! \cdots} \cdots.$$

Seien $x_1, x_2, \cdots x_m$ unabhängige Variabele, deren Anzahl m nicht kleiner ist als die Anzahl der Theile $n_1, n_2, \cdots$ von n. Dann ist diese Summe, ausgedehnt über alle Lösungen der Gleichungen (5.) und (6.), gleich dem Coefficienten von $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots$ in der Entwicklung des Productes

$$(8.) \quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^\alpha (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^\beta (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_m^3)^\gamma \cdots$$

nach Potenzen der Veränderlichen.

Dieses für die folgende Untersuchung grundlegende Ergebniss lässt sich auch ohne jede Rechnung so einsehen: Sei $R = C_1 C_2 \cdots C_s$ eine Permutation der ρ^{ten} Classe, die aus s Cyklen von je $c_1, c_2, \cdots, c_s$ Symbolen besteht, so dass

$$(9.) \qquad n = c_1 + c_2 + \cdots + c_s$$

ist. Nach den Entwicklungen in § 1 meiner Arbeit *Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen*, Sitzungsberichte 1898, die ich im Folgenden mit *U.* citiren werde, giebt die Zahl $\frac{h g_\varrho}{g h_\varrho}$ an, wie viele der $\frac{h}{g}$ Untergruppen von $\mathfrak{H}$, die mit $\mathfrak{G}$ conjugirt sind, die Permutation R enthalten. Man findet diese Gruppen, indem man die n Symbole auf alle möglichen Arten in Systeme von je $n_1, n_2, \cdots$ Symbolen theilt, und die Symbole jedes dieser Systeme in jeder Weise unter sich vertauscht. Die Anzahl der so erhaltenen Gruppen ist

$$\frac{h}{g} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots},$$

Digitized by Google

sie brauchen aber nicht alle unter einander verschieden zu sein. Damit R in einer dieser Gruppen vorkomme, muss es möglich sein, aus einigen der Cyklen $C_1, C_2, \cdots C_s$ eine Permutation von n_1 Symbolen zu bilden, aus einigen anderen eine solche von n_2 Symbolen, u. s. w. Dies ist auf so viele Weisen ausführbar, als man die Zahlen $n_1, n_2, \cdots$ als Summen der Zahlen $c_1, c_2, \cdots c_s$ darstellen kann. Diese Anzahl ist aber gleich dem Coefficienten von $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots$ in der Entwicklung des Productes

$$(10.) \quad (x_1^{c_1} + x_2^{c_1} + \cdots + x_m^{c_1})(x_1^{c_2} + x_2^{c_2} + \cdots + x_m^{c_2}) \cdots (x_1^{c_s} + x_2^{c_s} + \cdots + x_m^{c_s}),$$

das, abgesehen von der gewählten Bezeichnung, mit dem Ausdrucke (8.) übereinstimmt. Sind unter den Zahlen $n_1, n_2, \cdots$ oder unter den Zahlen $c_1, c_2, \cdots$ mehrere einander gleiche, so sind zwei Zerlegungen auch dann als verschieden anzusehen, wenn sie sich nur durch die Bezeichnung der darin vorkommenden Zahlen unterscheiden. Denn wenn auch $c_1 = c_2$ ist, so ist doch C_1 von C_2 verschieden.

Nach der Formel *U.* § 1, (9.) lässt sich $\frac{hg_\varrho}{gh_\varrho}$ als eine lineare Verbindung der Charaktere von $\mathfrak{H}$ mit ganzzahligen Coefficienten darstellen (oder anders ausgedrückt, ist das System der k Zahlen $\frac{hg_\varrho}{gh_\varrho}$ durch den Modul theilbar, der von den k^2 Werthen der k Charaktere gebildet wird). Jede solche Verbindung will ich einen *zusammengesetzten Charakter* von $\mathfrak{H}$ nennen. In der Entwicklung der ganzen symmetrischen Function n^{ten} Grades (8.) nach Potenzen von $x_1, x_2, \cdots x_m$ ist daher jeder Coefficient ein zusammengesetzter Charakter von $\mathfrak{H}$, d. h. der Werth eines solchen Charakters für die durch die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ bestimmte Classe (ρ).

§ 2.

Das Product aller Differenzen der m Variabelen $x_1, x_2, \cdots x_m$ sei

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots x_m) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_m - x_{m-1}).$$

In der Entwicklung dieser Function vom Grade $\frac{1}{2}m(m-1)$ hat jedes Glied die Gestalt

$$\pm x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m},$$

wo $k_1, k_2, \cdots k_m$ die Zahlen $0, 1, \cdots m-1$ in irgend einer Reihenfolge sind. Je nachdem diese Permutation eine positive oder eine negative ist, ist der Coefficient des Gliedes gleich $+1$ oder -1. Auch wenn $k_1, k_2, \cdots k_m$ irgend m positive oder negative Zahlen sind, benutze ich im Folgenden das Zeichen

$$(1.) \qquad [k_1, k_2, \cdots k_m] = \text{sign. } \Delta(k_1, k_2, \cdots k_m).$$

Digitized by Google

Es hat den Werth 0, wenn zwei der m Zahlen einander gleich sind, sonst den Werth $+1$ oder -1, je nachdem unter den Differenzen k_2-k_1, k_3-k_1, k_3-k_2, $\cdots$ eine gerade oder ungerade Anzahl negativ sind, je nachdem in der Folge $k_1, k_2, \cdots k_m$ eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen vorkommt.

Dann ist in dem Producte

$$(2.)\quad (x_1+x_2+\cdots+x_m)^\alpha(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2)^\beta(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_m^3)^\gamma\cdots\Delta(x_1,x_2,\cdots x_m)$$

jeder Coefficient eine ganzzahlige lineare Verbindung gewisser Coefficienten des Ausdrucks (8.), § 1 und mithin ebenfalls ein zusammengesetzter Character von $\mathfrak{H}$. Wie ich darauf gekommen bin, die symmetrische Function (8.), § 1 durch Multiplication mit dem Differenzenproducte in eine alternirende zu verwandeln, geht aus dem folgenden Beweise deutlich hervor. In dieser alternirenden Function bezeichne ich den Coefficienten von

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_m^{\lambda_m} \quad \text{mit} \quad [\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m]\chi_\varrho^{(\lambda)}.$$

Das Symbol (λ) bezeichnet das System der m Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, deren Summe

$$(3.)\qquad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m = n+\tfrac{1}{2}m(m-1)$$

ist, und das Symbol (ρ) die durch die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma\cdots$ der Zerlegung (2.), § 1 bestimmte Classe conjugirter Elemente von $\mathfrak{H}$. Ebenso wie die Classen denke ich mir die verschiedenen Lösungen der Gleichung (3.), wobei es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt, ganz willkürlich numerirt und mit (0), (1), $\cdots$ allgemein mit (λ) bezeichnet.

Für ein bestimmtes λ bilden, wie ich jetzt zeigen werde, die k Zahlen

$$\chi_\varrho^{(\lambda)} \qquad (\rho=0,1,\cdots k-1)$$

einen (einfachen) Charakter von $\mathfrak{H}$, für verschiedene λ verschiedene Charaktere. Ist $m=n$, so giebt es gerade k Systeme von je r verschiedenen Zahlen, die der Bedingung

$$(4.)\qquad \varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

genügen. Denn ordnet man in einer Lösung die Summanden so, dass

$$(5.)\qquad \varkappa_1<\varkappa_2<\cdots<\varkappa_n$$

ist, so entspricht ihr eine Zerlegung der Zahl n in die Theile

$$\varkappa_1 \leqq \varkappa_2-1 \leqq \varkappa_3-2 \leqq \cdots \leqq \varkappa_n-n+1$$

und umgekehrt. Mithin liefert die alternirende Function

$$(6.)\quad (x_1+x_2+\cdots+x_n)^\alpha(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^\beta(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)^\gamma\cdots\Delta(x_1,x_2,\cdots x_n)$$
$$=\sum_{(\varkappa)}[\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots\varkappa_n]\chi_\varrho^{(\varkappa)}x_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2}\cdots x_n^{\varkappa_n}$$

Digitized by Google

die Werthe der k Charaktere der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{H}$. Man erhält sie schon alle, indem man in dieser Summe von $n!\,k$ Gliedern nur die k betrachtet, worin die Exponenten der Bedingung (5.) genügen.

Zwischen den Charakteren $\psi_\varrho^{(\varkappa)}$ einer Gruppe $\mathfrak{H}$ bestehen die Relationen

$$(7.) \qquad \sum_\varrho h_\varrho \psi_\varrho^{(\varkappa)} \psi_\varrho^{(\varkappa')} = h, \qquad \sum_\varrho h_\varrho \psi_\varrho^{(\varkappa)} \psi_\varrho^{(\lambda)} = 0,$$

falls (λ) von dem zu $(\varkappa)$ inversen (conjugirten complexen) Charakter $(\varkappa')$ verschieden ist. Nun sei

$$\chi_\varrho = \sum_\varkappa r_\varkappa \psi_\varrho^{(\varkappa)}$$

ein zusammengesetzter Charakter, seien also die Coefficienten $r_\varkappa$ positive oder negative ganze Zahlen. Dann ist, weil $\psi_\varrho^{(\varkappa')} = \psi_{\varrho'}^{(\varkappa)}$ ist,

$$\sum_\varrho h_\varrho \chi_\varrho \chi_{\varrho'} = h \sum_\varkappa r_\varkappa^2.$$

Kann man also zeigen, dass diese Summe gleich h ist, so muss eine der Zahlen $r_\varkappa$ gleich ± 1, die $k-1$ anderen gleich 0 sein. Ist überdies χ_0 eine positive ganze Zahl, falls (0) die Hauptclasse ist, so folgt daraus, dass χ_ϱ ein (einfacher) Charakter ist. Kennt man mehrere solche Charaktere $\chi_\varrho^{(\varkappa)}, \chi_\varrho^{(\lambda)}, \cdots$ und ist

$$\sum_\varrho h_\varrho \chi_\varrho^{(\varkappa)} \chi_\varrho^{(\lambda)} = 0,$$

so sind sie von einander verschieden.

Für die symmetrische Gruppe vereinfachen sich diese Formeln noch dadurch, dass die in der Formel (6.) auftretenden Charaktere $\chi_\varrho^{(\varkappa)}$ nur reelle Werthe haben, also den inversen Charakteren gleich sind.

§ 3.

Um die aufgestellte Behauptung zu beweisen, führe ich ein zweites System von m unabhängigen Variabelen $y_1, y_2, \cdots y_m$ ein und bilde die Summe

$$(1.) \quad \sum_\varrho \frac{h_\varrho}{h} (x_1 + \cdots + x_m)^\alpha (x_1^2 + \cdots + x_m^2)^\beta \cdots (y_1 + \cdots + y_m)^\alpha (y_1^2 + \cdots + y_m^2)^\beta \cdots$$

$$= \sum \frac{1}{1^\alpha \alpha!} (x_1 + \cdots + x_m)^\alpha (y_1 + \cdots + y_m)^\alpha \frac{1}{2^\beta \beta!} (x_1^2 + \cdots + x_m^2)^\alpha (y_1^2 + \cdots + y_m^2)^\beta \cdots.$$

Beschränkt man die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ zunächst nicht durch die Bedingung

$$(2.) \qquad \alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots = n,$$

sondern ertheilt jedem die Werthe von 0 bis ∞, so ist die Summe dieser Reihe

$$e^{(x_1 + \cdots + x_m)(y_1 + \cdots + y_m) + \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_m^2)(y_1^2 + \cdots + y_m^2) + \cdots}.$$

Digitized by Google

Führt man in jedem Gliede die Multiplication aus, so wird der Exponent gleich

$$-l(1-x_1y_1)-l(1-x_1y_2)-l(1-x_2y_1)-\cdots-l(1-x_my_m).$$

Folglich ist die Summe gleich dem reciproken Werthe des Productes

$$(1-x_1y_1)(1-x_1y_2)(1-x_2y_1)\cdots(1-x_my_m).$$

Multiplicirt man daher den betrachteten Ausdruck noch mit

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots x_m)\ \Delta(y_1, y_2, \cdots y_m),$$

so wird er nach einer bekannten Formel von CAUCHY gleich der Determinante m^{ten} Grades

$$\left|\frac{1}{1-x_\mu y_\nu}\right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots m)$$

oder ausgerechnet

$$\Sigma\,[\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m]\,\frac{1}{(1-x_{\mu_1}y_1)(1-x_{\mu_2}y_2)\cdots(1-x_{\mu_m}y_m)}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_0^\infty{}_\lambda\, x^\lambda y^\lambda,$$

und folglich ist die Determinante gleich

$$\sum_\lambda \sum_\mu [\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m] x_{\mu_1}^{\lambda_1} y_1^{\lambda_1}\, x_{\mu_2}^{\lambda_2} y_2^{\lambda_2} \cdots x_{\mu_m}^{\lambda_m} y_m^{\lambda_m},$$

oder wenn man in jedem Gliede die Factoren in geeigneter Weise umstellt,

$$(3.) \qquad \sum_{\varkappa,\lambda} [\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m][\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m] x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \cdots x_m^{\varkappa_m}\, y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdots y_m^{\lambda_m}.$$

Jeder der m Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ durchläuft die Werthe von 0 bis ∞. Sind zwei dieser Exponenten einander gleich, so hat das Glied den Coefficienten 0. Für jedes System von m verschiedenen Exponenten durchlaufen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ die $m!$ Permutationen von $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$.

Nimmt man in der Summe (1.) nur die Glieder, die der Bedingung (2.) genügen, so hat man sich in der Reihe (3.) auf die Glieder zu beschränken, worin

$$(4.) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = n + \tfrac{1}{2} m(m-1)$$

ist. Daher ist diese endliche Reihe nach (6.), § 2 gleich

$$\sum_{\varkappa,\lambda} \left(\sum_i \frac{h_i}{h} \chi_i^{(\varkappa)} \chi_i^{(\lambda)} \right) [\varkappa_1, \cdots \varkappa_m][\lambda_1, \cdots \lambda_m]\, x_1^{\varkappa_1} \cdots x_m^{\varkappa_m}\, y_1^{\lambda_1} \cdots y_m^{\lambda_m},$$

wo über alle Werthsysteme $\varkappa, \lambda$ zu summiren ist, die der Bedingung (4.) und der analogen Bedingung

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_m = n + \tfrac{1}{2} m(m-1)$$

genügen. Wenn sich also $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ von $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ nicht durch die Reihenfolge allein unterscheiden, so ist

Digitized by Google

$$\sum_{\varrho} h_\varrho \chi_\varrho^{(\varkappa)} \chi_\varrho^{(\lambda)} = 0,$$

im anderen Falle aber ist die Summe gleich h. Damit ist der wesentliche Theil des Beweises erledigt, und es ist nur noch zu zeigen, dass die Zahlen $\chi_0^{(\varkappa)} = f^{(\varkappa)}$ positiv sind.

Für die Hauptclasse (0) ist $\alpha = n$, $\beta = 0$, $\gamma = 0, \cdots$, und daher ist

$$(5.)\quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n \Delta(x_1, x_2 \cdots x_m) = \sum [\lambda_1, \cdots \lambda_m] f^{(\lambda)} x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m}.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\left(\sum \frac{n!}{\mu_1! \cdots \mu_m!}\, x_1^{\mu_1} \cdots x_m^{\mu_m}\right)\left(\sum [\varkappa_1, \cdots \varkappa_m]\, x_1^{\varkappa_1} \cdots x_m^{\varkappa_m}\right),$$

wo $n = \mu_1 + \cdots + \mu_m$ ist, und $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ eine der $m!$ Permutationen der Zahlen $0, 1, \cdots m-1$ bedeutet. Die Function $\frac{1}{\mu!} = \frac{1}{\Pi(\mu)}$ ist Null, wenn μ negativ ist. Das Product der beiden Summen ist gleich $n!$ mal

$$\sum [\varkappa_1, \cdots \varkappa_m] \frac{1}{(\lambda_1 - \varkappa_1)!} \cdots \frac{1}{(\lambda_m - \varkappa_m)!}\, x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m}.$$

In dieser Summe ist der Coefficient von $x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m}$ gleich der Determinante m^{ten} Grades

$$\frac{f^{(\lambda)}}{h} = \left| \frac{1}{(\lambda_\mu - \nu + 1)!} \right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots m).$$

Multiplicirt man die Elemente der μ^{ten} Zeile mit $\lambda_\mu!$, und dividirt man die der ν^{ten} Spalte durch $(\nu - 1)!$, so erhält man

$$\frac{\lambda_1! \cdots \lambda_m!}{0! \cdots (m-1)!} \frac{f^{(\lambda)}}{h} = \left| \binom{\lambda_\mu}{\nu - 1} \right|.$$

Das Zeichen

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

brauche ich auch in dem Falle, wo x eine Variabele ist. Die Zeilen der letzten Determinante sind die Werthe der Functionen

$$\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \cdots \binom{x}{m-1} \text{ für } x = \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m.$$

Die Grade dieser Functionen sind $0, 1 \cdots m-1$. Sind also $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ unabhängige Variabele, so ist diese Determinante gleich $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m)$ bis auf einen constanten Divisor $\Delta(0, 1, \cdots m-1)$, den man erhält, indem man $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\cdots \lambda_m = m-1$ setzt. Da

$$\Delta(0, 1, \cdots m-1) = 0!\, 1! \cdots (m-1)!$$

ist, so ist

$$(6.)\qquad f^{(\lambda)} = \frac{n!\, \Delta(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m)}{\lambda_1!\, \lambda_2! \cdots \lambda_m!},$$

also positiv, wenn $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$ ist.

Digitized by Google

§ 4.

Um die k verschiedenen Charaktere zu erhalten, müssen wir $m = n$ setzen. Dann ist $\chi^{(\varkappa)}$ durch ein System von n Zahlen

$$(1.) \qquad (\varkappa) = \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$$

charakterisirt, die den Bedingungen

$$(2.) \qquad \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n = \tfrac{1}{2} n(n+1), \qquad 0 \leqq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots < \varkappa_n$$

genügen. Was die Beziehung zwischen den beiden Entwicklungen (2.) und (6.), § 2 betrifft, so ist

$$[\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m] \chi_\varrho^{(\lambda)} = [\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n] \chi_\varrho^{(\varkappa)},$$

wenn $(\varkappa)$ in dem Falle $m < n$ das System der n Zahlen

$$(3.) \qquad \varkappa_1, \varkappa_2 \cdots \varkappa_n = 0, 1, \cdots \mu - 1, \mu + \lambda_1, \cdots \mu + \lambda_m \qquad (m + \mu = n)$$

ist. Umgekehrt ist in dem Falle $m > n$

$$(4.) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m = 0, 1, \cdots \mu - 1, \mu + \varkappa_1, \cdots \mu + \varkappa_n \qquad (n + \mu = m).$$

Um also von m unabhängig zu sein, könnte man die von Null verschiedenen unter den Zahlen

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 - 1 \leqq \lambda_3 - 2 \leqq \cdots \leqq \lambda_m - m + 1$$

zur Definition des Charakters χ verwenden. Es erweist sich aber als praktischer, dazu die folgende *Charakteristik* zu benutzen.

Die n Zahlen (1.) sind alle $\leq 2n-1$, denn den Maximalwerth $2n-1$ erreicht $\varkappa_n$, wenn die $n-1$ anderen Zahlen die Minimalwerthe $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 1, \cdots \varkappa_{n-1} = n-2$ haben. Seien $a_1, a_2, \cdots a_n$ die Zahlen $0, 1, \cdots n-1$ in irgend einer Reihenfolge. Dann sind

$$n-1-a_1, \qquad n-1-a_2, \cdots n-1-a_n$$

dieselben Zahlen. Von diesen mögen $n-r$ unter den Zahlen (1.) vorkommen, etwa $n-1-a_{r+1}, \cdots n-1-a_n$. Die übrigen r der Zahlen (1.) sind $\geqq n$, und mögen mit $n+b_1, \cdots n+b_r$ bezeichnet werden. Dann nenne ich

$$(5.) \qquad (\varkappa) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \cdots a_r \\ b_1 b_2 \cdots b_r \end{pmatrix}$$

die Charakteristik von $\chi^{(\varkappa)}$. Damit sie völlig bestimmt sei, möge

$$(6.) \qquad a_1 < a_2 < \cdots < a_r, \qquad b_1 < b_2 < \cdots < b_r$$

sein. Die Gleichung (2.) lautet jetzt

$$(n-1-a_{r+1}) + \cdots + (n-1-a_n) + (n+b_1) + \cdots + (n+b_r) = \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Ferner ist

$$a_1 + \cdots + a_r + a_{r+1} + \cdots + a_n = 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \tfrac{1}{2} n(n-1)$$

Digitized by Google

und mithin

$$(7.) \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_r + b_1 + b_2 + \cdots + b_r = n - r.$$

Die linke Seite ist $> 2(0 + 1 + \cdots + (r-1)) = r(r-1)$, und folglich ist die Zahl r, die ich als *Rang der Charakteristik* (5.) bezeichne

$$(8.) \qquad r \leqq \sqrt{n} \quad .$$

Der Grad des Charakters $\chi^{(\varkappa)}$ wird nun

$$(9.) \qquad f^{(\varkappa)} = \frac{n!\,\Delta(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)}{\varkappa_1!\,\varkappa_2! \cdots \varkappa_n!} = \frac{n!\,\Delta(a_1, \cdots a_r)\,\Delta(b_1, \cdots b_r)}{a_1! \cdots a_r!\,b_1! \cdots b_r!\,\Pi(a_\alpha + b_\beta + 1)},$$

wo in dem letzten Producte α und β die Werthe $1, 2, \cdots r$ durchlaufen.

Bei der Durchführung dieser Umrechnung wollen wir, da $f^{(\varkappa)}$ positiv ist, die Vorzeichen ausser Acht lassen. Dann ist zu zeigen, dass

$$a_1! \cdots a_r!\,b_1! \cdots b_r!\,\Pi(a_\alpha + b_\beta + 1)\,\Delta(-a_{r+1} - 1, \cdots - a_n - 1, b_1, \cdots b_r)$$
$$= \pm (n - a_{r+1} - 1)! \cdots (n - a_n - 1)!\,(n + b_1)! \cdots (n + b_r)!\,\Delta(a_1, \cdots a_r)\,\Delta(b_1, \cdots b_r)$$

ist. Nun ist

$$\frac{(b_\beta + n)!}{b_\beta!} = \prod_\alpha (a_\alpha + b_\beta + 1) \prod_\gamma (a_\gamma + b_\beta + 1),$$

wo γ die Werthe $r+1, \cdots n$ durchläuft, und

$$\pm \Delta(-a_{r+1} - 1, \cdots - a_n - 1, b_1, \cdots b_r) = \Delta(a_{r+1}, \cdots a_n)\,\Delta(b_1, \cdots b_r) \prod_{\gamma,\beta} (a_\gamma + b_\beta + 1).$$

Daher ist noch zu beweisen, dass

$$a_1! \cdots a_r!\,\Delta(a_{r+1}, \cdots a_n) = (n - 1 - a_{r+1})! \cdots (n - 1 - a_n)!\,\Delta(a_1, \cdots a_r)$$

ist. Nun ist (falls in den Producten der Factor $a_\alpha - a_\alpha$ weggelassen wird)

$$(a_\alpha - a_1)(a_\alpha - a_2) \cdots (a_\alpha - a_n) = (a_\alpha - 0)(a_\alpha - 1) \cdots (a_\alpha - n + 1) = \pm a_\alpha!\,(n - 1 - a_\alpha)!.$$

Wenn man also die obige Gleichung mit $(n-1-a_1)! \cdots (n-1-a_r)!$ multiplicirt, so erhält man

$$\Delta(a_1, \cdots a_r)^2\,\Pi(a_\alpha - a_\gamma)\,\Delta(a_{r+1}, \cdots a_n) = \pm 0!\,1! \cdots (n-1)!\,\Delta(a_1, \cdots a_r).$$

Diese Formel ergiebt sich aber aus der Gleichung

$$0!\,1! \cdots (n-1)! = \Delta(0, 1, \cdots n-1) = \pm \Delta(a_1, \cdots a_r, a_{r+1}, \cdots a_n)$$
$$= \pm \Delta(a_1, \cdots a_r)\,\Delta(a_{r+1}, \cdots a_n)\,\Pi(a_\gamma - a_\alpha).$$

Der Ausdruck (9.) kann auf die Form einer Determinante r^{ten} Grades

$$(9.) \qquad f^{(\varkappa)} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_r! \cdots b_1! \cdots b_r!} \left| \frac{1}{a_\alpha + b_\beta + 1} \right| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots r)$$

gebracht werden.

Die Charakteristik (5.) lässt sich auch aus den m Zahlen ableiten, die oben mit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ bezeichnet sind. r derselben sind $\geqq m$, und gleich $m + b_1, m + b_2, \cdots m + b_r$, und von den Zahlen $0, 1, \cdots m-1$

Digitized by Google

fehlen unter ihnen die r Zahlen $m-1-a_1$, $m-1-a_2$, $m-1-a_r$. Um $\chi_\varrho^{(\lambda)}$ mit Hülfe der Entwicklung des Ausdrucks (2.), § 2 zu berechnen, braucht man darin nur $m \geqq a_r+1$ zu wählen.

Den der Charakteristik (5.) entsprechenden Charakter werde ich auch mit

$$\chi_\varrho^{(n)} = \chi\begin{pmatrix} a_1 a_2 \cdots a_r \\ b_1 b_2 \cdots b_r \end{pmatrix}_\varrho$$

bezeichnen. Setzt man z. B. in der Formel (2.), § 2 $m=2$, so erhält man

$$(10.)\quad (1-x)(1+x)^\alpha (1+x^2)^\beta (1+x^3)^\gamma \cdots = 1 + x\chi\begin{pmatrix} 1 \\ n-2 \end{pmatrix} + x^2\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & n-3 \end{pmatrix} + x^3\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n-4 \end{pmatrix} + \cdots + x^\lambda\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda-2 & n-\lambda-1 \end{pmatrix} + \cdots,$$

falls $\lambda < \frac{1}{2}(n+1)$ ist. Ist $n+1$ gerade und $\lambda = \frac{1}{2}(n+1)$, so ist der Coefficient von x^λ gleich 0. Dann kehren dieselben Coefficienten in umgekehrter Reihenfolge, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen wieder. Daher ist z. B.

$$(11.)\quad \begin{aligned} &\chi\begin{pmatrix} 1 \\ n-2 \end{pmatrix} = \alpha-1, \qquad \chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & n-3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-3)+\beta, \\ &\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n-4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-5)+(\alpha-1)\beta+\gamma, \\ &\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & n-5 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-7)+\tfrac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2)\beta+\tfrac{1}{2}\beta(\beta-3)+(\alpha-1)\gamma+\delta. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck hat demnach für alle Lösungen der Gleichung $\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta=7$ den Werth 0.

§ 5.

In besonders einfacher Weise lassen sich die Charaktere ersten Ranges berechnen. Dazu gehört der Charakter $\chi_1(R)=\alpha-1$, der (*U.*, § 5) jeder zweifach transitiven Gruppe von Substitutionen zukommt. Seine charakteristische Function ist

$$(1.)\qquad F(x) = (1-x)^{\alpha-1}(1-x^2)^\beta(1-x^3)^\gamma \cdots.$$

Denn die Summe der Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ ist $\chi_1(R)=\alpha-1$, und die Summe ihrer x^{ten} Potenzen ist $\chi_1(R^x)$, nämlich gleich der Anzahl der Symbole, die R^x ungeändert lässt, vermindert um 1. Nach den Resultaten des § 2 meiner Arbeit *Über die Composition der Charaktere einer Gruppe*, Sitzungsberichte 1899, ist der Coefficient von $(-x)^{n-1-\lambda}$ in der Entwicklung von $F(x)$ nach Potenzen von x eine lineare Verbindung der Charaktere von $\mathfrak{H}$ mit ganzen positiven Zahlencoefficien-

Digitized by Google

ten. Um diese zu ermitteln, mache ich $F(x)$ homogen und bilde die Summe

$$\sum_{\varrho} \frac{h_\varrho}{h} (u-v)^\alpha (u^2-v^2)^\beta (u^3-v^3)^\gamma \cdots (x_1 + \cdots + x_n)^\alpha (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^\beta (x_1^3 + \cdots + x_n^3)^\gamma \cdots,$$

worin

$$\frac{h_\varrho}{h} = \frac{1}{1^\alpha \alpha ! \, 2^\beta \beta ! \, 3^\gamma \gamma ! \cdots}$$

ist. Sieht man von der Summationsbeschränkung

$$n = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots$$

zunächst ab, so erhält man, wie in § 3, für die unendliche Reihe den Ausdruck

$$\left(\frac{(1-x_1 v) \cdots (1-x_n v)}{(1-x_1 u) \cdots (1-x_n u)} - 1 \right).$$

Dabei ist, um Weiterungen zu vermeiden, das Werthsystem $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = 0$ bei der Summation ausgeschlossen worden. Dieser Ausdruck ist mit

$$\frac{\Delta(x_1, x_2, \cdots x_n)}{u-v}$$

zu multipliciren, und dann ist in seiner Entwicklung nach steigenden Potenzen von u und v der Coefficient von $u^\lambda (-v)^{n-1-\lambda}$ zu bestimmen. Ersetzt man u und v durch ihre reciproken Werthe, und setzt man

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_n),$$

so ist in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{\Delta(x_1, x_2, \cdots x_n)}{v-u} \left(\frac{f(v)}{f(u)} - \frac{v^n}{u^n} \right)$$

nach fallenden Potenzen von u und v der Coefficient von

$$(-1)^{n-1-\lambda} u^{-n-1-\lambda} v^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots n-1)$$

zu ermitteln. Nun ist

$$\frac{1}{v-u} \left(\frac{f(v)}{f(u)} - \frac{v^n}{u^n} \right) = \frac{1}{u^n} \frac{u^n - v^n}{u-v} + \sum_\nu \frac{f(v)}{f'(x_\nu)(v-x_\nu)(u-x_\nu)},$$

und darin ist der Coefficient von $u^{-n-1-\lambda}$, mit $\Delta(x_1, x_2, \cdots x_n)$ multiplicirt, gleich

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots x_n) \sum \frac{f(v) x_\nu^{n+\lambda}}{f'(x_\nu)(v-x_\nu)} = \sum_\nu \Delta(x_1, \cdots x_{\nu-1}, v, x_{\nu+1}, \cdots x_n) x_\nu^{n+\lambda}.$$

In dieser Summe ist der Coefficient $(-1)^{n-1-\lambda} v^\lambda x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \cdots x_n^{\varkappa_n}$ zu berechnen, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$ den Bedingungen (2.), § 4 genügen. Dieser ist Null, ausser wenn $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_{n-1} \leqq n-1$ sind, und $\varkappa_n = n+\lambda$. Daher hat diese Zerlegung den Rang $r = 1$, und es ist

$$(\varkappa) = \binom{n-1-\lambda}{\lambda}.$$

Digitized by Google

Endlich ist der Coefficient von

$$(-1)^{n-1-\lambda} v^\lambda x_1^0 x_2^1 \cdots x_\lambda^{\lambda-1} x_{\lambda+1}^{\lambda+1} \cdots x_{n-1}^{n-1} x_n^{n+\lambda}$$

in $\Delta(x_1, \cdots x_{n-1}, v) x_n^{n+\lambda}$ gleich $+1$.

Daher ist

$$(2.) \qquad F(x) = \chi\binom{0}{n-1} - x\chi\binom{1}{n-2} + x^2\chi\binom{2}{n-3} \cdots$$
$$+ (-x)^\lambda \chi\binom{\lambda}{n-1-\lambda} + \cdots + (-x)^{n-2}\chi\binom{n-2}{1} + (-x)^{n-1}\chi\binom{n-1}{0}.$$

Die Charaktere ersten Ranges sind also

$$\chi\binom{0}{n-1} = 1, \qquad \chi\binom{1}{n-2} = \alpha - 1, \qquad \chi\binom{2}{n-3} = \binom{\alpha-1}{2} - \beta,$$
$$(3.) \quad \chi\binom{3}{n-4} = \binom{\alpha-1}{3} - (\alpha-1)\beta + \gamma,$$
$$\chi\binom{4}{n-5} = \binom{\alpha-1}{4} - \binom{\alpha-1}{2}\beta + (\alpha-1)\gamma + \binom{\beta}{2} - \delta, \cdots.$$

Ferner ist

$$(4.) \qquad \chi\binom{n-1}{0} = (-1)^{\beta+\delta+\cdots} = (-1)^{n-s},$$

wenn $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots$ die Anzahl der Cyklen von R ist, und allgemein

$$\chi\binom{b}{a}_2 = (-1)^{\beta+\delta+\cdots} \chi\binom{a}{b}_2.$$

§ 6.

Ist $\mathfrak{H}$ die symmetrische und $\mathfrak{G}$ die alternirende Gruppe des Grades n, und ist T irgend eine ungerade Permutation, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}T$, wo der Complex $\mathfrak{G}$ die $\frac{1}{2}n!$ geraden, und der Complex $\mathfrak{G}T = T\mathfrak{G}$ die $\frac{1}{2}n!$ ungeraden Permutationen enthält. Diese beiden Complexe sind die Elemente der Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ der Ordnung 2. Sie hat zwei Charaktere, 1, 1 und 1, −1. Folglich hat die Gruppe $\mathfrak{H}$ einen Charakter

$$(1.) \qquad \chi_2^{(1)} = \chi\binom{n-1}{0}_2 = (-1)^{\beta+\delta+\cdots} = (-1)^{n-s},$$

der für die Elemente von $\mathfrak{G}$ den Werth $+1$, für die von $\mathfrak{G}T$ den Werth -1 hat. Durch Multiplication mit diesem Charakter ersten Grades ergiebt sich aus jedem Charakter $\chi^{(\varkappa)}$ ein anderer $\chi^{(\lambda)}$. Zwei solche Charaktere, für die

$$(2.) \qquad \chi^{(\lambda)} = \chi^{(\varkappa)}\chi^{(1)}, \qquad \chi^{(\varkappa)} = \chi^{(\lambda)}\chi^{(1)}$$

ist, nenne ich *associirte*. Hat $\chi^{(\varkappa)}(R)$ für jede ungerade Permutation R den Werth 0, so ist dieser Charakter sich selbst associirt. Sonst

Digitized by Google

sind zwei associirte Charaktere von einander verschieden. Wir charakterisiren $\chi^{(\lambda)}$ durch ein System von n Zahlen, die den Bedingungen

$$(3.) \qquad \tfrac{1}{2}n(n+1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \qquad 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$$

genügen und $\chi^{(\varkappa)}$ durch eine analoge Zerlegung (2.), § 4, und wir nennen auch diese beiden Zerlegungen associirte. Ich will nun zeigen, dass dann die Zahlen

$$(4.) \qquad \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n, \ 2n-1-\lambda_1, \ 2n-1-\lambda_2, \cdots 2n-1-\lambda_n$$

abgesehen von der Reihenfolge mit den Zahlen $0, 1, \cdots 2n-1$ übereinstimmen. Zunächst sind auf diese Art die Zerlegungen (3.) paarweise einander zugeordnet. Denn $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$ sind n der $2n$ Zahlen $0, 1, \cdots 2n-1$. Bezeichnet man die n übrigen mit $2n-1-\lambda_1$, $2n-1-\lambda_2, \cdots 2n-1-\lambda_n$, so ist

$$\Sigma(\varkappa) + \Sigma(2n-1-\lambda) = 0 + 1 + \cdots + 2n-1 = n(2n-1),$$

und daher $\Sigma\varkappa = \Sigma\lambda$. Dass dann die Beziehungen (2.) bestehen, geht aus der Gleichung

$$(5.) \qquad \sum_{\varrho} \frac{h_\varrho}{h} \chi_\varrho^{(1)} \chi_\varrho^{(\varkappa)} \chi_\varrho^{(\lambda)} = 1$$

hervor. Um sie zu beweisen, bilde ich die unendliche Reihe

$$\begin{aligned} &\Sigma(-1)^{\beta+\delta+\cdots} \frac{1}{\alpha!}(x_1+\cdots+x_n)^\alpha (y_1+\cdots+y_n)^\alpha \frac{1}{2^\beta \beta!}(x_1^2+\cdots+x_n^2)^\beta (y_1^2+\cdots+y_n^2)^\beta \\ &\quad = e^{(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_n) - \frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2)+\cdots} \\ &\quad = \Pi(1+x_\mu y_\nu). \end{aligned}$$

Dann ist die Summe (5.) gleich dem Coefficienten von $x_1^{\varkappa_1} \cdots x_n^{\varkappa_n} y_1^{\lambda_1} \cdots y_n^{\lambda_n}$ in der Entwicklung des Productes

$$\Delta(x_1, \cdots x_n)\, \Delta(y_1, \cdots y_n)\, \Pi(1 + x_\mu y_\nu).$$

Ersetzt man $y_1, \cdots y_n$ durch $-\frac{1}{y_1}, \cdots -\frac{1}{y_n}$, so ist dies der Coefficient von $\pm x_1^{\varkappa_1} \cdots x_n^{\varkappa_n} y_1^{2n-1-\lambda_1} \cdots y_n^{2n-1-\lambda_n}$ in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\Delta(x_1, \cdots x_n)\, \Delta(y_1, \cdots y_n)\, \Pi(y_\nu - x_\mu) = \Delta(x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots y_n).$$

Dieser ist aber gleich 0, wenn nicht die $2n$ Zahlen (4.) alle unter einander verschieden sind, also abgesehen von der Reihenfolge mit den Zahlen $0, 1, \cdots 2n-1$ übereinstimmen. In diesem Falle ist der Coefficient ± 1. Auch ohne auf die genaue Bestimmung des Zeichens einzugehen, ergiebt sich daraus die Gleichung (5.), weil die Summe links nur einen der beiden Werthe 0 oder $+1$ haben kann.

Die Beziehung zwischen zwei associirten Charakteren lässt sich bequemer darstellen, wenn man $\chi^{(\varkappa)}$ durch die Charakteristik (5.), § 4 definirt. Seien $b_1, \cdots b_r, b_{r+1}, \cdots b_n$ die Zahlen $0, 1, \cdots n-1$. Sind dann $\varkappa_1, \cdots \varkappa_n$ die Zahlen $n-1-a_{r+1}, \cdots n-1-a_n, n+b_1, \cdots n+b_r$, so sind

Digitized by Google

$2n-1-\lambda_1, \cdots 2n-1-\lambda_n$ die Zahlen $n-1-a_1, \cdots n-1-a_r, n+b_{r+1}, \cdots n+b_n$, und $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ selbst die Zahlen $n-1-b_{r+1}, \cdots n-1-b_n, n+a_1, \cdots n+a_r$. Daher sind

$$(6.) \qquad (\varkappa) = \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r \\ b_1 \cdots b_r \end{pmatrix}, \qquad (\lambda) = \begin{pmatrix} b_1 \cdots b_r \\ a_1 \cdots a_r \end{pmatrix}$$

associirte Charakteristiken, oder es ist

$$(7.) \qquad \chi\begin{pmatrix} b_1 \cdots b_r \\ a_1 \cdots a_r \end{pmatrix}_\varrho = (-1)^{n-r}\chi\begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r \\ b_1 \ldots b_r \end{pmatrix}_\varrho .$$

Eine Charakteristik ist folglich stets und nur dann sich selbst associirt, wenn $a_1 = b_1, \cdots a_r = b_r$ ist. Dann ergiebt sich aber aus der Gleichung (7.), § 4

$$(8.) \qquad n = (2a_1 + 1) + \cdots + (2a_r + 1)$$

eine Darstellung von n als Summe von lauter verschiedenen ungeraden Zahlen. Umgekehrt entspricht jeder solchen Darstellung eine sich selbst associirte Charakteristik

$$(9.) \qquad (\varkappa) = \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r \\ a_1 \cdots a_r \end{pmatrix}, \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_r = \tfrac{1}{2}(n-r).$$

Die Anzahl v der sich selbst associirten Charaktere von $\mathfrak{H}$ ist also gleich der Anzahl der Darstellungen von n als Summe von lauter verschiedenen ungeraden Zahlen. Zufolge der bekannten Formel

$$\Pi(1 + x^{2\varkappa-1}) = 1 : \Pi(1-(-1)^{\varkappa-1}x^{\varkappa})$$

ist diese Anzahl gleich der Differenz der Anzahl der Zerlegungen

$$(10.) \qquad n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots ,$$

wofür $\Sigma(c-1)$ gerade ist, und der Anzahl derer, wofür $\Sigma(c-1)$ ungerade ist, also gleich der Differenz zwischen der Anzahl der geraden und der ungeraden Classen. Die k Classen zerfallen demnach in

$$(11.) \quad \tfrac{1}{2}(k+v) = u+v \text{ gerade und } \tfrac{1}{2}(k-v) = u \text{ ungerade Classen.}$$

Jeder Darstellung (8.) entspricht eine Zerlegung

$$n = 1 + (2a_1 + 1) + \cdots + (2a_{r-1} + 1) + 2a_r,$$

wofür $\Sigma(c-1)$ ungerade ist. Daher ist $u > v$, nur für $n = 3$ ist $u = v$.

Die hier entwickelten Sätze sind von Wichtigkeit bei der Berechnung der Charaktere der alternirenden Gruppe, die sich, wie ich nächstens zeigen werde, aus ihren Beziehungen zu den Charakteren von Untergruppen ebenfalls vollständig bestimmen lassen.

§ 7.

Ich hebe noch einige specielle Fälle hervor, worin sich gewisse Werthe von Charakteren in einfacher Weise bestimmen lassen. Die

Digitized by Google

Substitutionen der ρ^{ten} Classe mögen aus s Cyklen von je $c_1, c_2, \cdots c_s$ Symbolen bestehen. Dann ist

$$(1.) \qquad n = c_1 + c_2 + \cdots + c_s,$$

und es sei

$$(2.) \qquad c_1 \leqq c_2 \leqq \cdots \leqq c_s.$$

Nun ist $[x_1, x_2, \cdots x_n]\chi_{\rho}^{(\varkappa)}$ der Coefficient von $x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \cdots x_n^{\varkappa_n}$ in der Entwicklung des Productes

$$(3.) \qquad (x_1^{c_1} + \cdots + x_n^{c_1}) \cdots (x_1^{c_s} + \cdots + x_n^{c_s}) \Delta(x_1, \cdots x_n).$$

Ist die Charakteristik von $\chi^{(\varkappa)}$

$$(4.) \qquad (\varkappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_r \\ b_1 & b_2 \cdots b_r \end{pmatrix},$$

so ist

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n = n-1-a_{r+1}, \cdots n-1-a_n, n+b_1, \cdots n+b_r.$$

Irgend ein Glied in der Entwicklung von $\Delta(x_1, \cdots x_n)$ ist $\pm x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$, wo $k_1, k_2, \cdots k_n$ die Zahlen $0, 1, \cdots n-1$ sind. Irgend ein Glied in der Entwicklung des Productes

$$(5.) \qquad (x_1^{c_1} + \cdots + x_n^{c_1}) \cdots (x_1^{c_s} \cdots + x_n^{c_s})$$

ist $x_\sigma^{l_1} x_\tau^{l_2} \cdots x_\omega^{l_{s'}}$, wo $l_1 = c_{\sigma_1} + c_{\sigma_2} + \cdots$, $l_2 = c_{\tau_1} + c_{\tau_2} + \cdots$, ist und

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots \qquad \tau_1, \tau_2, \cdots$$

zusammen die Zahlen $1, 2, \cdots s$ sind. Folglich ist $s' \leqq s$ und nur dann $s' = s$, wenn $l_1, l_2, \cdots l_s$ abgesehen von der Reihenfolge mit $c_1, c_2, \cdots c_s$ übereinstimmen. Multiplicirt man diese beiden Glieder, so werden s' der Exponenten $k_1, k_2, \cdots k_n$ vermehrt. Erhält man so das Glied $x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \cdots x_n^{\varkappa_n}$, so werden r von den n Exponenten $k_1, k_2, \cdots k_n$, die $\leqq n-1$ sind, durch diese Vermehrung grösser als $n-1$, nämlich gleich

$$n + b_1, \cdots n + b_r.$$

Daher muss $s' \geqq r$ sein. Dies ist nicht möglich, wenn $s < r$ ist, und folglich ist in diesem Falle $\chi_{\rho}^{(\varkappa)} = 0$.

Ist die Anzahl s der Cyklen, aus denen die Substitutionen der ρ^{ten} Classe bestehen, kleiner als der Rang r der Charakteristik $(\varkappa)$, *so ist* $\chi_{\rho}^{(\varkappa)} = 0$.

Sei jetzt $s = r$. Dann müssen genau s der Exponenten $k_1, k_2, \cdots k_n$ vermehrt werden, damit sie gleich $n + b_1, \cdots n + b_s$ werden, und die übrigen $n-s$ Exponenten müssen mit $n-1-a_{s+1}, \cdots n-1-a_n$ übereinstimmen. Ferner muss $s' = s$ sein und $l_1, l_2, \cdots l_s = c_1, c_2, \cdots c_s$. Die s Exponenten $n-1-a_1, \cdots n-1-a_s$ werden jeder um eine der Zahlen $c_1, \cdots c_s$ vermehrt, und so ergeben sich die Zahlen $n + b_1, \cdots n + b_s$. Daher ist

$$(6.) \qquad c_1 - 1 = a_\alpha + b_\lambda,\ c_2 - 1 = a_\beta + b_\mu,\ \cdots c_s - 1 = a_\vartheta + b_\tau,$$

Digitized by Google

wo $\alpha, \beta, \cdots \vartheta$ und $\lambda, \mu, \cdots \tau$ zwei Permutationen der Zahlen $1, 2, \cdots s$ sind. In einer anderen Reihenfolge mögen diese s Gleichungen lauten

$$c_\xi - 1 = a_\gamma + b_1, \; c_\eta - 1 = a_\delta + b_2, \; \cdots \; c_\zeta - 1 = a_\nu + b_s.$$

Zu dem Gliede

$$[n + b_1, \cdots n + b_s, n - 1 - a_{s+1}, \cdots n - 1 - a_n] \chi_\varrho^{(n)} x_1^{n+b_1} \cdots x_s^{n+b_s} x_{s+1}^{n-1-a_{s+1}} \cdots x_n^{n-1-a_n}$$

von (3.) erhält man also einen Beitrag, indem man das Glied

$$x_1^{n-1-a_\gamma} \cdots x_s^{n-1-a_\nu} x_{s+1}^{n-1-a_{s+1}} \cdots x_n^{n-1-a_n}$$

von $\Delta(x_1, \cdots x_n)$ mit dem Gliede $x_1^{c_\xi} \cdots x_s^{c_\zeta}$ von (5.) multiplicirt. Daher ist

$$\chi_\varrho^{(n)} = [-a_{s+1} - 1, \cdots -a_n - 1, b_1, \cdots b_s] \, \Sigma [-a_{s+1}, \cdots -a_n, -a_\gamma, \cdots -a_\nu]$$

oder, wenn man wieder die Reihenfolge (6.) herstellt,

$$\chi_\varrho^{(n)} = \Sigma [-a_{s+1} - 1, \cdots -a_n - 1, b_\lambda, \cdots b_\tau] \, [-a_{s+1}, \cdots -a_n, -a_\alpha, \cdots -a_\vartheta],$$

die Summe erstreckt über alle Lösungen der Gleichungen (6.). Das Product der beiden Vorzeichen ist gleich

$$[b_\lambda, \cdots b_\tau] [a_\alpha, \cdots a_\vartheta] (-1)^{\frac{1}{2}s(s-1)}$$
$$\text{sign.} \, (a_{s+1} - a_\alpha) \cdots (a_n - a_\alpha) \cdots (a_{s+1} - a_\vartheta) \cdots (a_n - a_\vartheta).$$

Das letztere Vorzeichen ist, da sich $\alpha, \beta, \cdots \vartheta$ von $1, 2, \cdots s$ nur durch die Reihenfolge unterscheiden, gleich

$$\text{sign.} \, (a_{s+1} - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdots (a_{s+1} - a_s) \cdots (a_n - a_s).$$

Da $a_1 < a_2 < \cdots < a_s$ ist, und $a_1, \cdots a_s, a_{s+1} \cdots a_n = 0, 1, \cdots n-1$ sind, so kommen unter den Zahlen $a_{s+1}, \cdots a_n$ die Zahlen $0, 1, \cdots a_1 - 1$ vor, und demnach sind unter den $n-s$ Differenzen $a_{s+1} - a_1, \cdots a_n - a_1$ genau a_1 negative. Ebenso kommen unter den Zahlen $a_{s+1}, \cdots a_n$ die Zahlen $0, 1, \cdots a_2 - 1$ vor mit Ausnahme von a_1, und demnach sind unter den $n-s$ Differenzen $a_{s+1} - a_2, \cdots a_n - a_2$ genau $a_2 - 1$ negative.

Daher ist das letzte Vorzeichen gleich

$$(-1)^{a_1 + (a_2 - 1) + (a_3 - 2) + \cdots + (a_s - s + 1)}.$$

Da endlich $b_1 < b_2 < \cdots < b_s$ ist, so ist $[b_\lambda, b_\mu, \cdots b_\tau] = [\lambda, \mu, \cdots \tau]$, und folglich ist

$$(7.) \qquad \chi_\varrho^{(n)} = (-1)^{a_1 + a_2 + \cdots a_s} \Sigma [\alpha, \beta, \cdots \vartheta] [\lambda, \mu, \cdots \tau],$$

die Summe erstreckt über alle Lösungen der Gleichungen (6.). Ein Glied dieser Summe hat den Werth $+1$ oder -1, je nachdem $\lambda, \mu, \cdots \tau$ eine positive oder negative Permutation von $\alpha, \beta, \cdots \vartheta$ ist.

Ist z. B.

$$(8.) \quad c_1 - 1 = a_1 + b_1, \qquad c_2 - 1 = a_2 + b_2, \; \cdots \qquad c_s - 1 = a_s + b_s,$$

so ist damit eine Lösung der Gleichungen (6.) gegeben. Eine andere können sie nicht haben. Denn ist $a_1 + b_1 = c_1 - 1 = a_\alpha + b_\lambda$ so muss,

Digitized by Google

weil $a_\alpha \geq a_1$ und $b_\lambda > b_1$ ist, $a_\alpha = a_1$ und $b_\lambda = b_1$ sein und mithin $\alpha = 1$ und $\lambda = 1$, u. s. w. Daher ist unter der Bedingung (8.)

$$\chi_\varrho^{(n)} = (-1)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_s}. \tag{9.}$$

Jeder Charakter $\chi^{(n)}$ hat also für mindestens eine Classe den Werth ± 1. Ist noch specieller $a_1 = b_1, \cdots a_s = b_s$, also noch (8.)

$$c_1 = 2a_1 + 1, \quad c_2 = 2a_2 + 1, \cdots \quad c_s = 2a_s + 1, \tag{10.}$$

so ist

$$\chi_\varrho^{(n)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)} = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}. \tag{11.}$$

wo

$$p = c_1 c_2 \cdots c_s \tag{12.}$$

ist. Denn dieses Product ist

$$(1 + 2a_1) \cdots (1 + 2a_s) = 1 + 2(a_1 + \cdots + a_s) \pmod 4.$$

Ist aber $r = s$ und $a_1 = b_1 \cdots a_s = b_s$, ohne dass die Bedingung (10.) erfüllt ist, so ist

$$\chi_\varrho^{(n)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)} \Sigma [\alpha, \beta, \cdots \mathfrak{d}][\lambda, \mu, \cdots \tau],$$

die Summe ausgedehnt über alle Lösungen der Gleichungen

$$c_1 - 1 = a_\alpha + a_\lambda, \quad c_2 - 1 = a_\beta + a_\mu, \cdots \quad c_s - 1 = a_\mathfrak{d} + a_\tau.$$

Diesen Gleichungen genügt man nicht, indem man

$$\alpha = \lambda, \quad \beta = \mu, \cdots \quad \mathfrak{d} = \tau$$

setzt, weil sonst nach (2.) $\alpha = \lambda = 1$, $\beta = \mu = 2, \cdots \mathfrak{d} = \tau = s$ wäre. Daher entspricht jeder Lösung eine andere

$$c_1 - 1 = a_\lambda + a_\alpha, \quad c_2 - 1 = a_\mu + a_\beta, \cdots \quad c_s - 1 = a_\tau + a_\mathfrak{d},$$

die von ihr verschieden ist, und folglich ist $\chi_\varrho^{(n)}$ eine gerade Zahl. Auch für alle anderen Classen ist, wie ich zeigen werde, $\chi_\varrho^{(n)}$ gerade, mit Ausnahme der einen Classe (10.)

Um noch ein anderes Beispiel zu behandeln, will ich $\chi_\varrho^{(n)}$ für den Fall berechnen, wo die Permutationen der ρ^{ten} Classe aus einem Cyklus von c Symbolen und aus $n-c$ Cyklen von je einem Symbole bestehen, und zwar nach der in § 3 zur Bestimmung von $f^{(\lambda)}$ benutzten Methode. Bedient man sich auch der dort gebrauchten Bezeichnungen, so ist

$$\Sigma [\lambda_1, \cdots \lambda_n] \chi_\varrho^{(\lambda)} x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = (x_1^c + \cdots + x_n^c)(x_1 + \cdots + x_n)^{n-c} \Delta(x_1 \cdots x_n),$$

$$= (x_1^c + \cdots + x_n^c)\left(\Sigma \frac{(n-c)!}{\mu_1! \cdots \mu_n!} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}\right)\left(\Sigma [\varkappa_1, \cdots \varkappa_n] x_1^{\varkappa_1} \cdots x_n^{\varkappa_n}\right),$$

wo $\mu_1 + \cdots + \mu_n = n - c$ ist, und $\varkappa_1, \cdots \varkappa_n$ die Zahlen $0, 1, \cdots n-1$ sind. Ist $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, so besteht $\chi_\varrho^{(\lambda)} : (n-c)!$ aus n Theilen. Den ersten

Digitized by Google

erhält man, indem man von der Summe $x_1^c + \cdots + x_n^c$ nur das erste Glied nimmt. Er ist gleich

$$\Sigma[\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n] \frac{1}{(\lambda_1 - c - \varkappa_1)!} \frac{1}{(\lambda_2 - \varkappa_2)!} \cdots \frac{1}{(\lambda_n - \varkappa_n)!},$$

also nach § 3 gleich

$$\frac{\Delta(\lambda_1 - c, \lambda_2, \cdots \lambda_n)}{(\lambda_1 - c)!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!}.$$

Dividirt man durch

$$f^{(\lambda)} = \frac{n!\,\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!}$$

und multiplicirt man mit

$$h_\varrho = \frac{n!}{c(n-c)!},$$

so wird

$$\frac{-c^2 h_\varrho \chi_\varrho^{(\lambda)}}{f^{(\lambda)}}$$

eine Summe von n Gliedern, deren erstes

$$\frac{(\lambda_1 - c - \lambda_1)(\lambda_1 - c - \lambda_2) \cdots (\lambda_1 - c - \lambda_n)\,\lambda_1(\lambda_1 - 1) \cdots (\lambda_1 - c + 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n)}$$

ist. Setzt man

$$\varphi(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n), \quad \psi(x) = (x - c - \lambda_1) \cdots (x - c - \lambda_n)\, x(x-1) \cdots (x - c + 1),$$

so ist also

$$\frac{-c^2 h_\varrho \chi_\varrho^{(\lambda)}}{f^{(\lambda)}} = \frac{\psi(\lambda_1)}{\varphi'(\lambda_1)} + \cdots + \frac{\psi(\lambda_n)}{\varphi'(\lambda_n)}$$

oder gleich dem Coefficienten von x^{-1} in der Entwicklung von $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ nach absteigenden Potenzen von x. Ist

$$(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_r \\ b_1 & b_2 \cdots b_r \end{pmatrix},$$

so erweitere man diesen Bruch mit

$$\big(x - (n-1-a_1)\big) \cdots \big(x - (n-1-a_r)\big)\ \big(x - c - (n-1-a_1)\big) \cdots \big(x - c - (n-1-a_r)\big).$$

Nun sind die Zahlen

$$\lambda_1, \cdots \lambda_n, n-1-a_1, \cdots n-1-a_r$$

gleich

$$0, 1, \cdots n-1, n+b_1, \cdots n+b_r.$$

Ersetzt man nun x durch $x+n$, so wird der Bruch gleich

$$\frac{(x + a_1 + 1) \cdots (x + a_r + 1)(x - c - b_1) \cdots (x - c - b_r)\, x(x-1) \cdots (x - c + 1)}{(x - b_1) \cdots (x - b_r)(x - c + a_1 + 1) \cdots (x - c + a_r + 1)}.$$

Ist also

$$f(x) = \frac{(x - b_1) \cdots (x - b_r)}{(x + a_1 + 1) \cdots (x + a_r + 1)}, \tag{13.}$$

Digitized by Google

so ist

$$(14.)\qquad \frac{-c^2 h_\varrho \chi_\varrho^{(\lambda)}}{f^{(\lambda)}} = \left[\frac{f(x-c)\,x\,(x-1)\cdots(x-c+1)}{f(x)}\right] x^{-1} = \left[\frac{\varphi(x-c)\,x\,(x-1)\cdots(x-c+1)}{\varphi(x)}\right] x^{-1}$$

d. h. gleich dem Coefficienten von x^{-1} in der Entwicklung dieser rationalen Function nach absteigenden Potenzen von x, und diese Formel bleibt auch gültig, wenn man unter Anwendung der Bezeichnungen (3.) oder (4.), § 4

$$(15.)\qquad \varphi(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_m)$$

setzt. Für $c = 2$ ist daher

$$(16.)\qquad \frac{h_\varrho \chi_\varrho^{(\lambda)}}{f^{(\lambda)}} = \tfrac{1}{2}\left(\Sigma\, b(b+1) - \Sigma\, a(a+1)\right).$$

Dass dieser Ausdruck eine ganze Zahl ist, habe ich schon in § 2 meiner Arbeit *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte 1896, bewiesen.

Ausgegeben am 17. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Digitized by Google